

Stochastische Dynamik linearer Systeme

Jürgen Burzlaff

1977

Stochastische Dynamik linearer Systeme

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der
Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Jürgen Burzlaff
München, Mai 1977



1. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp
 2. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Süßmann
- Tag der mündlichen Prüfung: 14. 9. 1977

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die klassische und quantenmechanische stochastische Dynamik (StD) linearer Systeme (LS). Unter StD verstehen wir hierbei eine stochastische Beschreibung, die im allgemeinen über die gewöhnliche Hamiltonsche hinausgeht. "LS" soll eine Kurzform für "System, dessen Bewegungsgleichung eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist," sein.

Den Zugang zur klassischen stochastischen Beschreibung solcher Systeme liefert die Hamiltonsche Beschreibung des abgeschlossenen Systems, das aus dem LS und seinem adjungierten besteht. Unter Benutzung der Liouvillegleichung des abgeschlossenen Systems erhalten wir die klassische StD des LS in Form einer verallgemeinerten Liouvillegleichung. Der Umweg über das abgeschlossene System und damit die Beschränkung auf LS ist dabei nur für die Wahl der kanonischen Paare im Hinblick auf die Quantisierung von Bedeutung.

Die Form des quantenmechanischen Analogons der verallgemeinerten Liouvillegleichung wird durch stochastische Prinzipien festgelegt. Die spezielle Form der dissipativen von Neumannschen Gleichung für LS erhalten wir durch kanonische Quantisierung. Genauer studiert wird die StD des gedämpften harmonischen Oszillators (HO), insbesondere durch Integration der dissipativen von Neumannschen Gleichung.

Abkürzungen

StD	Stochastische Dynamik
LS	Lineares System
HO	Harmonischer Oszillator
StQM	Stochastische Quantenmechanik



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555615_0077

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Kap. 1 <u>Einleitung</u>	3
§1 Problemstellung	3
§2 Ansätze und Resultate	5
 <u>TEIL 1 KLASSISCHE STOCHASTISCHE DYNAMIK</u>	
Kap. 2 <u>Die klassische Dynamik des abgeschlossenen Systems</u>	10
§1 Lineare Systeme und ihre adjungierten	10
§2 Die Lagrangesche Mechanik des abgeschlossenen Systems	13
§3 Die Hamiltonsche Mechanik des abgeschlossenen Systems	18
Kap. 3 <u>Die verallgemeinerte Liouvillegleichung</u>	23
§1 Die Kontinuitätsgleichung offener Systeme gerader Ordnung	23
§2 Die quantisierbare Form der verallgemeinerten Liouvillegleichung	26
§3 Die Lösung der verallgemeinerten Liouville-gleichung	29
§4 Die verallgemeinerte Liouvillegleichung offener Systeme ungerader Ordnung	32
 <u>TEIL 2 STOCHASTISCHE QUANTENMECHANIK</u>	
Kap. 4 <u>Prinzipien der stochastischen Quantenmechanik</u>	34
§1 Die dissipative von Neumannsche Gleichung	34
§2 Positivität und vollständige Positivität	39
§3 Ergodenbedingung und kanonische Quantisierung	45
Kap. 5 <u>Stochastische Quantenmechanik des gedämpften harmonischen Oszillators</u>	48
§1 Quantisierung des gedämpften harmonischen Oszillators	48

	Seite
§2 Die Lösung der dissipativen Gleichung . .	51
§3 Der strahlungsgedämpfte harmonische Oszillator	58
<u>Anhang</u>	61
<u>Literaturverzeichnis</u>	65

Kap. 1 Einleitung

§1 Problemstellung

Die Erfolge der einheitlichen Beschreibung reversibler Prozesse mit Hilfe der Hamiltonschen Mechanik in der klassischen Physik und der Hamiltonschen Quantenmechanik in der Quantenphysik führten zu dem Versuch, irreversible Prozesse nicht als grundlegend anzusehen, sondern Irreversibilität durch Nebenbedingungen ins Spiel zu bringen. Zur Durchführung dieses Vorhabens wurden verschiedene Methoden vorgeschlagen, am häufigsten der Übergang zur grobkörnigen Beschreibung der mikroskopischen Hamiltonschen Dynamik (vgl. z.B. Tolman /50/, S.152ff), der Übergang zum Grenzfalle unendlicher Teilchenzahl des Systems oder die Berücksichtigung der Wechselwirkung mit der Umgebung (vgl. Blatt /3/).

Auch in der mathematischen Formulierung überzeugend erscheinen aber bisher nur Arbeiten, die die Irreversibilität durch die Auswahl bestimmter Anfangsbedingungen und die Berücksichtigung der Wechselwirkung mit der Umgebung ins Spiel bringen. Zu diesen Arbeiten gehören diejenigen von Mazur et al. /9,18,39/, von Davies /13,14/ und von Pulè /45/. Die Auswahl bestimmter Anfangsbedingungen erscheint dabei nötig, um dem Umkehrreinwand zu entgehen, die Berücksichtigung der Wechselwirkung mit der Umgebung, um die Wiederkehrzeit unendlich lang zu machen (bzgl. des Umkehr- und Wiederkehrreinwands vgl. z.B. Weidlich /53/, S.122ff).

In diesen Arbeiten und in jeder anderen, die Erfolg versprechen soll, müssen mindestens zwei Schwierigkeiten überwunden werden. Zum einen müssen die technischen Schwierigkeiten von Vielteilchenproblemen gelöst werden, zum anderen die prinzipielle Schwierigkeit, aus einer Hamiltonschen Theorie Größen abzuleiten, deren Zeitentwicklung nicht Hamiltonsch ist. Die oben erwähnten Arbeiten zeigen, daß beide Schwierigkeiten bewältigt werden

können. Es ist aber oft bequem, sie von vornherein zu umgehen, indem eine nicht-Hamiltonsche Dynamik zur Grundlage der Theorie gemacht wird, wenn sich dadurch die Zahl der Freiheitsgrade erheblich reduzieren läßt. Im Hinblick darauf wollen wir uns in dieser Arbeit mit der nicht-Hamiltonschen Dynamik beschäftigen.

Dieses Vorhaben und seine Verwirklichung sind nicht neu. Schon seit langer Zeit gibt es in der klassischen Physik Theorien, deren Zeitgleichung nicht Hamiltonsch ist. Die Boltzmannsche Stoßgleichung, die Langevingleichung oder die Fokker-Planck-Gleichung sind Beispiele dafür. Auch in der Quantenphysik existieren seit einiger Zeit Ansätze zu einer Erweiterung der Hamiltonschen Dynamik. Sudarshan et al. /27,28,40,48/ und Kossakowski /33/ stellten sich unabhängig voneinander die Frage nach dem allgemeinsten dynamischen Gesetz für Quantensysteme. Ihre Antworten verlassen den Rahmen der Hamiltonschen Dynamik und tragen in der Literatur den Namen "stochastische Dynamik" (StD) oder "nicht-Hamiltonsche Quantenmechanik". Wir wollen in dieser Arbeit die Bedeutung des ersten Namens soweit erweitern, daß er auch für die entsprechende klassische Theorie gilt.

Über die Frage nach der Gestalt nicht-Hamiltonscher Theorien hinaus stellt sich die Frage nach ihrer Verknüpfung. Die Antwort auf diese Frage sollte eine Vorschrift sein, die das Rezept ersetzt, nach dem man in der Hamiltonschen Physik aus der Bewegungsgleichung über die kanonischen Gleichungen und die Liouvillegleichung die von Neumannsche Gleichung erhält. Diese Vorschrift ist nicht allein von ästhetischem Interesse. Historisch ist die Hamiltonsche Physik für viele Probleme diesem Weg gefolgt. Und auch in der nicht-Hamiltonschen Physik sollte dieser Weg offen stehen für Probleme, bei denen sich die klassische Theorie als einfacher erweist.

Mindestens für ein Problem ist dies der Fall. In einer regularisierten Theorie ist die Bewegungsgleichung

eines Teilchens im eigenen elektromagnetischen Feld wohldefiniert und ein möglicher klassischer Ausgangspunkt. Von Bopp und Lutzenberger /7, 8, 38/ wurde dieser Ausgangspunkt gewählt und mit symmetrischer Greenfunktion innerhalb der Hamiltonschen Physik der Weg zur Quantenmechanik beschritten. Das Ergebnis dieses Vorgehens war ein Teilchenspektrum, das eine Möglichkeit der Erklärung der Existenz von Elektron und Müon bietet.

Wird als Ausgangspunkt nicht die Bewegungsgleichung eines Teilchens im eigenen symmetrischen Feld sondern im eigenen retardierten Feld gewählt, so steht dieses Problem außerhalb der Hamiltonschen Mechanik, und der Weg zur Quantenmechanik ist von vornherein nicht offen. Diesen Weg für eine Klasse spezieller, im Hinblick auf beliebige Bewegungsgleichungen zu eröffnen und die StD, die an den einzelnen Stationen eine Rolle spielt, zu diskutieren, ist Ziel dieser Arbeit. Als spezielle Bewegungsgleichungen wurden dabei lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gewählt, da sie besonders einfach sind, und darüber hinaus die nichtrelativistische Behandlung eines Elektrons im eigenen retardierten Feld bei Entwicklung nach dem Regularisierungsparameter gerade auf solche Bewegungsgleichungen führt (vgl. z.B. Jackson /26/ S.584ff bzgl. des Abraham-Lorentz-Modells und Anhang).

§2 Ansätze und Resultate

Die Frage nach der Verknüpfung der klassischen und quantenmechanischen Theorie für Bewegungsgleichungen, die außerhalb der gewöhnlichen Hamiltonschen Mechanik stehen, die Frage der Quantisierung der Systeme, die durch solche Bewegungsgleichungen beschrieben werden, also, wurde für Systeme unter dem Einfluß der Stokesschen Reibungskraft $\underline{V}_R \sim \dot{\underline{x}}$ schon von vielen Autoren diskutiert. In letzter Zeit fand diese Frage hauptsächlich im Zusammenhang mit kernphysikalischen Problemen /29/ erneut verstärkt Interesse, so daß die alten Antworten einer Revision

unterzogen und neue Ansätze vorgeschlagen wurden. Hasse /21/ diskutiert die beiden Antworten, die am häufigsten auf die Frage der Quantisierung der Reibungskraft gegeben wurden, und zwar quantenmechanische Theorien mit explizit zeitabhängigem Hamiltonoperator und solche mit nicht-linearer Schrödingergleichung.

Die Theorie mit explizit zeitabhängigem Hamiltonoperator geht davon aus, daß zwar für die Reibungskraft $K_R = -2\gamma m \dot{x}$ kein verallgemeinertes Potential existiert (vgl. z.B. Goldstein /19/ S.24), wohl aber die explizit zeitabhängige Lagrangefunktion $L_t = e^{2\gamma t} (\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x))$ zur Bewegungsgleichung eines Teilchens unter dem Einfluß der Reibungskraft K_R und einer konservativen Kraft $-\partial V/\partial x$ führt. Diese Lagrangefunktion machten unabhängig voneinander Kanai /30/, Bopp /4/, Denman /17/ und Messer /41/ zum Ausgangspunkt der Theorie.

In üblicher Weise, d.h. insbesondere Ersetzung des kanonischen Impulses durch $-i \partial/\partial x$, erhalten die Autoren /4,30,41/ aus L_t die Hamiltonfunktion, den Hamiltonoperator und die Schrödingergleichung. Die resultierende Theorie wurde noch von vielen anderen Autoren /10,11,22, 23,31,43,46, 47,51/ untersucht und durch Brittin /10/ schon bald wegen ihrer Verletzung der Unschärferelation für Ort und kinetischen Impuls kritisiert. Denn die Lagrangefunktion L_t führt zu einem kanonischen Impuls, der sich um den Faktor $e^{2\gamma t}$ vom kinetischen unterscheidet.

Das Problem mit der Unschärferelation vermeidet eine zweite Gruppe von Autoren /1,21,34,35/, deren Quantisierungsprogramm zu nichtlinearen Schrödingergleichungen führt. Die Quantisierungsvorschrift ist hierbei, einen hermiteschen Operator $W(x, \partial/\partial x, \psi)$ so zu bestimmen, daß sich mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V + \gamma W$ wenigstens der klassische Zusammenhang zwischen Ort und Impuls und die Bewegungsgleichung für die Mittelwerte ergeben. Diese Bedingungen legen die Form von W nicht fest, sondern lassen mindestens eine spezielle Lösung, die von

Kostin /34,35/ vorgeschlagen wurde, und eine ganze Klasse von Lösungen zu, die von Albrecht /1/, in zwei Spezialfällen von Süßmann /49/ und Hasse /21/, gefunden wurden.

Wie Albrecht /1/ zeigt, resultieren aus all diesen Ansätzen Schwierigkeiten, die überwunden werden müssen, bevor die Theorien akzeptiert werden könnten. Kan und Griffin /29/ haben auf die Existenz ungedämpfter angeregter Zustände in der Kostinschen Theorie hingewiesen und dafür nur eine Erklärung vorschlagen können, die die Schwierigkeiten verschiebt, aber nicht beseitigt /1/. Für einen Teil der Albrechtschen Klasse von Reibungsoperatoren erhält man ebenfalls ungedämpfte angeregte Zustände, für einen anderen mit der Zeit wachsende kinetische Energie, und für den Rest wird der Grundzustand des nichtdissipativen Systems durch die Addition des Reibungsoperators zerstört. Alle diese Eigenschaften sind ohne weitere Erklärung von vornherein nicht akzeptierbar.

Insbesondere die Existenz von ungedämpften angeregten Zuständen legt die Vermutung nahe, daß die Hamiltonsche Dynamik zu eng für die Beschreibung der Reibungskraft ist, daß die Theorie sich an einer Verallgemeinerung der Hamiltonschen Dynamik orientieren sollte. Dies liegt umso näher, als seit den Arbeiten Sudarshans et al. /27,28,40,48/ und Kossakowskis /33/ eine Verallgemeinerung der Hamiltonschen Zeitentwicklung existiert, die sich als natürliche Beschreibung irreversibler Prozesse anbietet. Sowieso sollte die Theorie von der von Neumannschen Gleichung ausgehen, die für stochastische Phänomene wie das der Reibung angemessen ist, und nicht von einer Beschreibung durch reine Zustände.

Außerhalb der beiden Gruppen, deren Quantisierungsvorschriften zu explizit zeitabhängigen Hamiltonoperatoren bzw. nichtlinearen Schrödingergleichungen führen, stehen Arbeiten, die für den Fall des gedämpften HO nicht-hermitesche Hamiltonoperatoren zur Grundlage der Theorie

machen. Dekker /15,16/ geht zu komplexen Koordinaten und zu einer Bewegungsgleichung über, die die des gedämpften HO impliziert und aus einer komplexen Lagrange-funktion ableitbar ist. Die Frage nach der Zeitgleichung beantwortet er aber falsch, indem er auch mit nichthermiteschem Operator die Hamiltonsche Zeitentwicklung voraussetzt. Denn sind alle Eigenwerte von $\hat{H}$ reell, impliziert die von Neumannsche Gleichung, daß die zugehörigen Zustände stationär sind und keine Dissipation beschreiben. Existiert aber ein imaginärer Eigenwert, ist die zeitliche Konstanz der Norm nicht zu erreichen.

Durch Hinzufügen des adjungierten Systems zum gedämpften HO - ein Vorgehen, daß schon Morse und Feshbach (/42/ S.298) und Trübenbacher /54/ vorgeschlagen haben - gelangt auch Bopp /6/ zu einem nichthermiteschen Hamiltonoperator. In dieser Theorie überzeugt aber die Trennung der beiden Systeme wegen der Willkür bei der Wahl der dazu nötigen kanonischen Transformation nicht. Auch bleibt die Frage nach der Zeitgleichung offen, die wegen der Nichthermitizität des Hamiltonoperators, wie wir schon wissen, nicht mit dem Hinweis auf die Schrödingergleichung oder die von Neumannsche Gleichung beantwortet werden kann.

Alle bis hierhin diskutierten Theorien haben noch mit Problemen zu kämpfen und erscheinen nicht als tragfähig genug, Verallgemeinerungen zuzulassen, die z.B. die Behandlung der Strahlungskraft einschließen. Für die Behandlung linearer Systeme (LS) werden wir deshalb in dieser Arbeit eine neue Theorie entwickeln, die außerhalb der Hamiltonschen Dynamik steht, sich insbesondere an der nicht-Hamiltonschen Quantenmechanik Sudarshans et al. und Kossakowskis orientiert. "LS" soll hierbei eine Kurzform für "System, dessen Bewegungsgleichung eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist," sein. Als Zugang zur Theorie wird der Abschluß des offenen Systems durch Hinzunahme des adjungierten gewählt,

ein Umweg, der nur auf die Auswahl der kanonischen Paare Einfluß hat und sich nach intensivem Studium dieses Problems als überflüssig erweisen sollte.

Im ersten Teil der Arbeit wird die klassische StD behandelt. Im 2. Kapitel diskutieren wir hierbei, wie das LS durch Hinzufügen des adjungierten Systems abgeschlossen werden kann, wie Lagrangefunktion, Hamiltonfunktion und Liouvillegleichung des abgeschlossenen Systems aussehen, und wie die Separation der Liouvillegleichung zur Beschreibung des LS zurückführt. Die verallgemeinerte Liouville-gleichung, zu der wir auf diese Weise geführt werden, ist Gegenstand des 3. Kapitels. In diesem Kapitel werden die bei der Separation freibleibende Funktion der Zeit durch stochastische Bedingungen festgelegt, die verallgemeinerte Liouvillegleichung und ihre Lösung diskutiert.

Im zweiten Teil der Arbeit wird die stochastische Quantenmechanik (StQM) behandelt. Im 4. Kapitel legen wir die Form der dissipativen von Neumannschen Gleichung durch stochastische Prinzipien fest und schlagen ein Quantisierungsprogramm für die klassische StD vor. Dieses Quantisierungsprogramm wird für den gedämpften HO im 5. Kapitel durchgeführt. In diesem einfachen Fall kann die dissipative von Neumannsche Gleichung integriert und der dissipative Prozeß genau diskutiert werden.

TEIL 1 KLASSISCHE STOCHASTISCHE DYNAMIK

Kap. 2 Die klassische Dynamik des abgeschlossenen Systems

§1 Lineare Systeme und ihre adjungierten

Zu einer linearen Bewegungsgleichung N-ter Ordnung

$$\sum_{n=0}^N a_n x^{(n)} + a = 0, \quad x^{(n)} := d^n x / dt^n, \quad a_n \neq 0, \quad (2.1)$$

existiert im allgemeinen keine Lagrangefunktion

$$L = L(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, t), \quad k = \begin{cases} \frac{N}{2} & (N \text{ gerade}) \\ \frac{N+1}{2} & (N \text{ ungerade}) \end{cases}, \quad (2.2)$$

deren Euler-Lagrangesche Gleichung

$$[L]_x := -\frac{\partial L}{\partial x^{(0)}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} - \dots - (-1)^k \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x^{(k)}} = 0 \quad (2.3)$$

($[L]_x$ wird Lagrangesche Ableitung genannt) identisch mit der Bewegungsgleichung ist.

Das einfachste und wohlbekannte Beispiel, das die Richtigkeit dieser Aussage zeigt, ist die Bewegungsgleichung eines Teilchens unter dem Einfluß der Stokesschen Reibungskraft (vgl. z.B. Goldstein /19/ S.24)

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} = 0. \quad (2.4)$$

Andere einfache Beispiele sind die Bewegungsgleichungen des gedämpften HO

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = 0 \quad (2.5)$$

und des strahlungsgedämpften HO

$$-2m\tau\ddot{\ddot{x}} + m\dot{x} + m\omega_0^2 x = 0. \quad (2.6)$$

Allgemein gilt /24/: Für eine Bewegungsgleichung ungerader Ordnung existiert keine Lagrangefunktion, deren Euler-Lagrangesche Gleichung gleich der Bewegungsgleichung ist, für eine Bewegungsgleichung gerader Ordnung

$$F(t, x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(2k)}) = 0 \quad (2.7)$$

genau dann, wenn der aus F abgeleitete Differentialausdruck

$$\delta F(u) := \sum_{n=0}^{2k} \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} u^{(n)} \quad (2.8)$$

gleich seinem adjungierten

$$\tilde{\delta F}(u) := \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} u \quad (2.9)$$

ist. Für die lineare Bewegungsgleichung (2.1) ist die Gleichheit von (2.8) und (2.9) mit dem Verschwinden aller Koeffizienten mit ungeraden Indizes äquivalent. Diese starke Einschränkung der Möglichkeit einer Lagrangeschen Formulierung besteht natürlich nur, wenn wir die Gleichheit von Euler-Lagrangescher Gleichung und Bewegungsgleichung fordern und nicht mit einer Gleichheit bis auf einen integrierenden Faktor zufrieden sind.

Verschwinden alle Koeffizienten mit ungeraden Indizes, so ist die Bewegungsgleichung (2.1) mit der Euler-Lagrangeschen Gleichung der Lagrangefunktion

$$L(x^{(0)}, \dots, x^{(k)}) = - \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{2} a_{2n} (x^{(n)})^2 - ax \quad (2.10)$$

identisch. Für Bewegungsgleichungen ohne Terme ungerader Ordnung existiert also eine explizit zeitunabhängige Lagrangefunktion. Unsere Konstruktionsvorschrift wird zeigen, daß explizit zeitunabhängige Lagrangefunktionen zu Hamiltonfunktionen führen, die ebenfalls nicht explizit von der Zeit abhängen, für die also wie üblich mit Hilfe der kanonischen Gleichungen

$$\frac{dH}{dt} = \sum_n \left(\frac{\partial H}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial H}{\partial p_n} \dot{p}_n \right) = \sum_n \left(\frac{\partial H}{\partial x_n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial x_n} \right) = 0 \quad (2.11)$$

folgt.

Interpretiert man $H(t)$ als Energie des Systems zur Zeit t , heißt Gl.(2.11), daß die Energie erhalten ist, daß das zugehörige System keine Energie verliert. Wir nennen solch ein System "nichtdissipativ". Ein LS, das durch Gl.(2.1) mit Koeffizienten $a_{2n-1}=0$ ($n=1, \dots, k$) beschrieben wird, ist also ein nichtdissipatives System. Kräfte $K_d = -a_{2n-1}x^{(2n-1)}$, die sich nicht aus einem verallgemeinerten Potential herleiten lassen, deuten wir als Effekt der Wechselwirkung mit der Umgebung und damit einhergehenden Energieverlustes und nennen die zugehörigen Systeme "dissipativ". Wegen des Zusammenhangs zwischen Dissipation und Wechselwirkung mit der Umgebung nennen wir dissipative Systeme auch "offen", nichtdissipative auch "abgeschlossen".

Ein beliebiges lineares, insbesondere dissipatives System kann nun auf einfache und wohldefinierte Weise (vgl. Trübenbacher /54/) abgeschlossen werden. Wir werden im folgenden das dabei entstehende Gesamtsystem immer "das abgeschlossene System" und die beiden Systeme, aus denen es besteht, offen nennen, obwohl auch die Untersysteme im hier uninteressanten Fall verschwindender Koeffizienten a_{2n-1} ihrerseits abgeschlossen sein können. Zum abgeschlossenen System gelangen wir, indem wir zur Bewegungsgleichung (2.1) die adjungierte Gleichung

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n a_n y^{(n)} = 0 \quad (2.12)$$

hinzufügen. Beide Gleichungen zusammen erhält man als Euler-Lagrangesche Gleichungen mit der Lagrangefunktion

$$L(x^{(0)}, \dots, x^{(N)}, y) = -y \sum_{n=0}^N a_n x^{(n)} - ya \quad (2.13)$$

und mit jeder Lagrangefunktion, die sich von (2.13) nur um Summanden der Form $c \frac{d}{dt} x^{(n)} y^{(m)}$ unterscheidet.

Denn die Euler-Lagrangesche Gleichung $[L]_y = 0$ führt zur Bewegungsgleichung (2.1), die Gleichung $[L]_x = 0$ zur adjungierten Gleichung (2.12), und die Lagrangesche Ableitung von $\frac{d}{dt} x^{(n)} y^{(m)}$ verschwindet. Daß die Lagrangesche Ableitung nach y mit der Bewegungsgleichung für x zusammenhängt und umgekehrt, zeigt schon an dieser Stelle, daß es nicht genügt, das abgeschlossene System wieder zu trennen, um zur Beschreibung des linearen, insbesondere dissipativen Systems zu gelangen. Es wird vielmehr auch ein Funktionswechsel der Größen des Systems und seines adjungierten nötig sein, um die Systeme zu entkoppeln.

§2 Die Lagrangesche Mechanik des abgeschlossenen Systems

Indem wir Terme der Form $c \frac{d}{dt} x^{(n)} y^{(m)}$ addieren, bringen wir die Lagrangefunktion (2.13) nun in eine symmetrischere Form. Wir unterscheiden hierbei zwischen Bewegungsgleichungen gerader und ungerader Ordnung, da, wie sich zeigen wird, für ungerades N aus einer in x und y vollständig symmetrischen Lagrangefunktion keine Hamiltonfunktion abgeleitet werden kann. Die entsprechenden Systeme nennen wir der Kürze halber auch LS gerader, bzw. ungerader Ordnung.

Unter der Bedingung der Existenz der zugehörigen Hamiltonfunktion haben folgende Lagrangefunktionen des gedämpften HO und des strahlungsgedämpften HO maximale Symmetrie:

$$L_{GHO}(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = -m\omega_0^2 xy - m\gamma(\dot{x}y - x\dot{y}) + m\dot{x}\dot{y}, \quad (2.14)$$

$$L_{SHO}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}) = -m\omega_0^2 xy + m\dot{x}\dot{y} + 2m\tau\dot{x}\ddot{y}. \quad (2.15)$$

Für LS N -ter Ordnung gilt allgemein:

$$\begin{aligned}
 N=2k \ (k \in \mathbb{N}): \quad & L_g(x^{(0)}, \dots, x^{(k)}, y^{(0)}, \dots, y^{(k)}) \\
 = & -ay - a_0xy - \frac{a_1}{2}(\dot{x}y - x\dot{y}) + a_2\dot{x}\dot{y} + \frac{a_3}{2}(\ddot{x}y - \dot{x}\ddot{y}) - \dots \quad (2.16) \\
 & - (-1)^{k-1} \frac{a_{N-1}}{2} (x^{(k)} y^{(k-1)} - x^{(k-1)} y^{(k)}) - (-1)^k a_N x^{(k)} y^{(k)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N=2k-1 \ (k \in \mathbb{N}): \quad & L_h(x^{(0)}, \dots, x^{(k-1)}, y^{(0)}, \dots, y^{(k)}) \\
 = & -ay - a_0xy - \frac{a_1}{2}(\dot{x}y - x\dot{y}) + a_2\dot{x}\dot{y} + \frac{a_3}{2}(\ddot{x}y - \dot{x}\ddot{y}) - \dots \quad (2.17) \\
 & - (-1)^{k-1} a_{N-1} x^{(k-1)} y^{(k-1)} - (-1)^k a_N x^{(k-1)} y^{(k)}.
 \end{aligned}$$

Das Vorzeichen der Lagrangefunktionen wurde dabei so gewählt, daß für den H0 die kanonischen Impulse gleich den kinetischen sind und nicht gleich den negativen kinetischen Impulsen. Würden wir nicht von (2.16) und (2.17) ausgehen sondern von Lagrangefunktionen, die sich von diesen durch das Vorzeichen unterscheiden, so würden sich in den Ergebnissen nur die Vorzeichen der kanonischen Impulse und der Hamiltonfunktion ändern.

Um aus den Lagrangefunktionen (2.15), (2.16) und (2.17) Hamiltonfunktionen abzuleiten, muß man von einem allgemeinen Verfahren (Ostrogradsky /44/; vgl. Whitaker /54/ S.281ff) Gebrauch machen, das bei Lagrange-funktionen zur Anwendung kommt, die von höheren als nur ersten Ableitungen abhängen. Zu einer Lagrangefunktion $L(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$ definiert man

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}(x_0, \dots, x_k, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{k-1}, p_0, \dots, p_{k-1}) \\
 := L(x_0, \dots, x_k) + \sum_{n=0}^{k-1} p_n (\dot{x}_n - x_{n+1}). \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Das System der zu (2.18) gehörigen Euler-Lagrange-schen Gleichungen

$$[\tilde{L}]_{x_n} = -\frac{\partial L}{\partial x_n} + p_{n+1} \dot{p}_n = 0, \quad (n=1, \dots, k-1), \quad (2.19)$$

$$[\tilde{L}]_{x_0} = -\frac{\partial L}{\partial x_0} + \dot{p}_0 = 0, \quad [\tilde{L}]_{x_k} = -\frac{\partial L}{\partial x_k} + p_{k+1} = 0,$$

$$[\tilde{L}]_{p_n} = -\dot{x}_n + x_{n+1} = 0 \quad (2.20)$$

impliziert die Bewegungsgleichung $[L]_x = 0$, da (2.19)

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial L}{\partial x_k} + (-1)^k \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \dot{p}_{k-1} \\ &= -(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial L}{\partial x_k} - (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \frac{\partial L}{\partial x_{k-1}} - \dots - \frac{\partial L}{\partial x_0} \end{aligned} \quad (2.21)$$

impliziert und (2.20) den Rest leistet. Die Lagrangefunktion (2.18) kann also als Lagrangefunktion des Systems, das durch die Bewegungsgleichung $[L]_x = 0$ beschrieben wird, gewählt werden.

Da $\tilde{L}$ auf sehr einfache Weise von den ersten Ableitungen abhängt, ist der Übergang zur Hamiltonfunktion $H(x_0, \dots, x_{k-1}, p_0, \dots, p_{k-1})$ sofort möglich, falls es die Euler-Lagrangesche Gleichung $[\tilde{L}]_{x_k} = 0$ gestattet, x_k mit Hilfe der Variablen x_n und p_n ($n=0, 1, \dots, k-1$) zu eliminieren. Denn in diesem Fall kann man

$$\begin{aligned} H(x_0, \dots, x_{k-1}, p_0, \dots, p_{k-1}) &:= \sum_{n=0}^{k-1} p_n \dot{x}_n - \tilde{L} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} p_n x_{n+1} - L(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k(x_n, p_n)) \end{aligned} \quad (2.22)$$

definieren, und das Variationsproblem

$$\delta \int \tilde{L}(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k(x_n, p_n), \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{k-1}, p_0, \dots, p_{k-1}) dt = 0 \quad (2.23)$$

impliziert wie gewöhnlich die kanonischen Gleichungen

$$\dot{x}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial x_n}, \quad (n=0, \dots, k-1). \quad (2.24)$$

Für die Lagrangefunktion (2.15) des strahlungsge-
dämpften HO muß das Verfahren einfach auf zwei Koordinaten
x und y erweitert werden, was zu

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{SHO}(x_0, x_1, \dot{x}_0, p_0, y_0, y_1, y_2, \dot{y}_0, \dot{y}_1, q_1, q_2) \\ = -m\omega_0^2 x_0 y_0 + m x_1 y_1 + 2m\tau x_1 y_2 \\ + p_0(\dot{x}_0 - x_1) + q_0(\dot{y}_0 - y_1) + q_1(\dot{y}_1 - y_2) \end{aligned} \quad (2.25)$$

und im allgemeinen zu

$$N=2k \quad (k \in \mathbb{N}):$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_g(x_0, \dots, x_k, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{k-1}, p_0, \dots, p_{k-1}, y_0, \dots, y_k, \dot{y}_0, \dots, \dot{y}_{k-1}, q_0, \dots, q_{k-1}) \quad (2.26) \\ = L_g(x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k) + \sum_{n=0}^{k-1} p_n(\dot{x}_n - x_{n+1}) + \sum_{n=0}^{k-1} q_n(\dot{y}_n - y_{n+1}), \end{aligned}$$

$$N=2k-1 \quad (k \in \mathbb{N}):$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_N(x_0, \dots, x_{k-1}, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{k-2}, p_0, \dots, p_{k-2}, y_0, \dots, y_k, \dot{y}_0, \dots, \dot{y}_{k-1}, q_0, \dots, q_{k-1}) \quad (2.27) \\ = L_N(x_0, \dots, x_{k-1}, y_0, \dots, y_k) + \sum_{n=0}^{k-2} p_n(\dot{x}_n - x_{n+1}) + \sum_{n=0}^{k-1} q_n(\dot{y}_n - y_{n+1}) \end{aligned}$$

führt.

Für gerades N gestatten es die Gleichungen

$$\begin{aligned} [\tilde{L}_g]_{x_k} &= -\frac{\partial L_g}{\partial x_k} + p_{k-1} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{a_{N-1}}{2} y_{k-1} + (-1)^k a_N y_k + p_{k-1} = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

und

$$\begin{aligned} [\tilde{L}_g]_{y_k} &= -\frac{\partial L_g}{\partial y_k} + q_{k-1} \\ &= -(-1)^{k-1} \frac{a_{N-1}}{2} x_{k-1} + (-1)^k a_N x_k + q_{k-1} = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

y_k zugunsten von y_{k-1} und p_{k-1} und x_k zugunsten von x_{k-1} und q_{k-1} zu eliminieren. Für ungerades N lauten die Bestimmungsgleichungen für y_k und x_{k-1}

$$\begin{aligned} [\tilde{L}_\mu]_{x_{k-1}} &= -\frac{\partial L_\mu}{\partial x_{k-1}} + p_{k-2} \\ &= (-1)^{k-2} \frac{a_{N-2}}{2} y_{k-2} + (-1)^{k-1} a_{N-1} y_{k-1} + (-1)^k a_N y_k + p_{k-2} = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

und

$$\begin{aligned} [\tilde{L}_\mu]_{y_k} &= -\frac{\partial L_\mu}{\partial y_k} + q_{k-1} \\ &= (-1)^k a_N x_k + q_{k-1} = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

An dieser Stelle wird auch klar, warum für Bewegungsgleichungen gerader und ungerader Ordnung verschiedene Lagrangefunktionen, (2.16) bzw. (2.17), als Ausgangspunkt gewählt wurden. Die Gleichungen (2.28) und (2.29) liefern mit $a_N=0$ keine Bestimmungsgleichungen für x_k und y_k . Deshalb ist das Verfahren mit der größtmöglichen Symmetrie gerade das vorgeschlagene, das dazu führt, daß die Anzahl

der kanonischen Paare (x_n, p_n) und (y_n, q_n) gleich der Ordnung der Bewegungsgleichung ist.

§3 Die Hamiltonsche Mechanik des abgeschlossenen Systems

Für den gedämpften HO folgt aus der Lagrangefunktion (2.14)

$$p = m\dot{y} - m\gamma y, \quad q = m\dot{x} + m\gamma x \quad (2.32)$$

und

$$H_{\text{HO}}(x, p, y, q) = \frac{pq}{m} - \gamma(px - qy) + m\omega^2 xy \quad (2.33)$$

mit der reduzierten Frequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, die für den Fall $\omega_0 > \gamma$, auf den wir uns in unserer späteren Diskussion beschränken werden, reell ist.

Für beliebige LS gerader Ordnung liefert das allgemeine Verfahren über die Gleichungen (2.26), (2.28) und (2.29) die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} N=2k \ (k \in \mathbb{N}) : \quad & H_g(k_m, p_m, y_m, q_m) \\ &= \sum_{m=0}^{k-2} p_m x_{m+1} - \frac{a_{N-1}}{2a_N} p_{k-1} x_{k-1} \\ &+ \sum_{m=0}^{k-2} q_m y_{m+1} + \frac{a_{N-1}}{2a_N} q_{k-1} y_{k-1} - \frac{(-1)^k}{a_N} p_{k-1} q_{k-1} \\ &+ q_0 y_0 + a_0 x_0 y_0 + \frac{a_1}{2} (x_1 y_0 - x_0 y_1) - a_2 x_1 y_1 - \dots \\ &+ (-1)^k \frac{a_{N-3}}{2} (x_{k-1} y_{k-2} - x_{k-2} y_{k-1}) \\ &- (-1)^k (a_{N-2} - \frac{a_{N-1}^2}{4a_N}) x_{k-1} y_{k-1}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

wobei im Argument von H_g die Symbole x_n, p_n, y_n, q_n für die Tupel $(x_0, \dots, x_{k-1})$, $(p_0, \dots, p_{k-1})$, $(y_0, \dots, y_{k-1})$, $(q_0, \dots, q_{k-1})$ bzw. stehen.

Die zur Hamiltonfunktion (2.34) gehörigen kanonischen Gleichungen zerfallen in zwei Zyklen. Der eine Zyklus besteht aus den Gleichungen

$$\dot{x}_n = \frac{\partial H_g}{\partial p_n} = \dot{x}_n(x_i, q_i), \quad (2.35)$$

$$\dot{q}_n = -\frac{\partial H_g}{\partial y_n} = \dot{q}_n(x_i, q_i), \quad (n=0, \dots, k-1), \quad (2.36)$$

enthält nur die Variablen x_n und q_n und führt auf die Bewegungsgleichung (2.1). Der andere Zyklus besteht aus den Gleichungen

$$\dot{y}_n = \frac{\partial H_g}{\partial q_n} = \dot{y}_n(y_i, p_i), \quad (2.37)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H_g}{\partial x_n} = \dot{p}_n(y_i, p_i), \quad (n=0, \dots, k-1), \quad (2.38)$$

enthält nur die Variablen y_n und p_n und führt auf die adjungierte Gleichung (2.12). Die Gleichungen (2.32), (2.35) und (2.37) zeigen wieder die Verknüpfung der beiden Systeme, über die schon im Zusammenhang mit der Lagrange-funktion (2.13) gesprochen wurde. In diesen Gleichungen kommt die Verknüpfung dadurch zum Ausdruck, daß der kinetische Impuls des einen Systems mit dem kanonischen des anderen verknüpft ist und umgekehrt.

Bei vorgegebener Hamiltonfunktion wird nun die StD durch die Liouvillegleichung bestimmt. Für das abgeschlossene System, das durch die Hamiltonfunktion (2.34) beschrieben wird, ist also die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x_n, p_n, y_n, q_n, t)$ durch die Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H_g, \rho\}_{(x_n, p_n)(y_n, q_n)} \quad (2.39)$$

gegeben, wobei $\{f, g\}(x_n, p_n)(y_n, q_n)$ Poissonklammern bezüglich der kanonischen Paare (x_n, p_n) und (y_n, q_n) bedeutet, also

$$\begin{aligned} & \{f, g\}(x_n, p_n)(y_n, q_n) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial g}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial p_n} + \frac{\partial f}{\partial y_n} \frac{\partial g}{\partial q_n} - \frac{\partial g}{\partial y_n} \frac{\partial f}{\partial q_n} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

gilt.

Berücksichtigen wir die Gleichungen (2.35) bis (2.38), so sehen wir, daß die Liouville-Gleichung (2.39) separiert. Denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = & - \sum_{n=0}^{k-1} \left[\dot{p}_n(y_i, p_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_n} + \dot{x}_n(x_i, q_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \right. \\ & \left. + \dot{q}_n(x_i, q_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} + \dot{y}_n(y_i, p_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_n} \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

und mit dem Ansatz

$$\mathcal{L}(x_n, p_n, y_n, q_n, t) = f_1(x_n, q_n, t) f_2(y_n, p_n, t) \quad (2.42)$$

folgt

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} f_2 + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial t} = f_1(x_n, q_n, t) f_2(y_n, p_n, t). \quad (2.43)$$

Dies führt zu den Gleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}(x_n, q_n, t) - f_1(x_n, q_n, t) = \lambda(t) f_1(x_n, q_n, t) \quad (2.44)$$

und

$$\frac{\partial f_2}{\partial t}(y_n, p_n, t) - f_2(y_n, p_n, t) = -\lambda(t) f_2(y_n, p_n, t), \quad (2.45)$$

die wir im nächsten Kapitel genauer diskutieren werden. Zuvor soll für Bewegungsgleichungen ungerader Ordnung das

analoge Verfahren diskutiert werden.

Für den strahlungsgedämpften HO folgt aus der Lagrangefunktion (2.25) und den Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$[\tilde{L}_{SHO}]_{x_1} = -m y_1 - 2m\tau y_2 + p_0 = 0, \quad (2.46)$$

$$[\tilde{L}_{SHO}]_{y_2} = -2m\tau x_1 + q_1 = 0 \quad (2.47)$$

die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H_{SHO}(x_0, p_0, y_0, y_1, q_0, q_1) \\ = \frac{1}{2m\tau} p_0 q_1 - \frac{1}{2\tau} q_1 y_1 + q_0 y_1 + m\omega_0^2 x_0 y_0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Allgemein folgt für beliebige LS ungerader Ordnung aus der Lagrangefunktion (2.27) mit den Gleichungen (2.30) und (2.31)

$$\begin{aligned} N=2k-1 \ (k \in \mathbb{N}): \quad H_N(x_N, p_N, y_N, q_N) \\ = \sum_{n=0}^{k-3} p_n x_{n+1} + \sum_{n=0}^{k-2} q_n y_{n+1} \\ + \frac{q_{N-1}}{q_N} q_{k-1} y_{k-1} - \frac{q_{N-2}}{2q_N} q_{k-1} y_{k-2} - \frac{(-1)^k}{q_N} p_{k-2} q_{k-1} \\ + a y_0 + a_0 x_0 y_0 + \frac{a_1}{2} (x_1 y_0 - x_0 y_1) - a_2 x_1 y_1 - \dots \\ + (-1)^k a_{N-3} x_{k-2} y_{k-2} - (-1)^k \frac{a_{N-2}}{2} x_{k-2} y_{k-1} \end{aligned} \quad (2.49)$$

wobei im Argument von H_N die Symbole x_n, p_n, y_n, q_n für die

Tupel $(x_0, \dots, x_{k-2})$, $(p_0, \dots, p_{k-2})$, $(y_0, \dots, y_{k-1})$,
 $(q_0, \dots, q_{k-1})$ bzw. stehen.

Auch die zur Hamiltonfunktion (2.49) gehörigen kanonischen Gleichungen zerfallen in zwei Zyklen und zwar bzgl. der Variablen $(x_0, \dots, x_{k-2}, q_0, \dots, q_{k-1})$ und $(y_0, \dots, y_{k-1}, p_0, \dots, p_{k-2})$. Aus den kanonischen Gleichungen

$$\dot{x}_n = \frac{\partial H_n}{\partial p_n} = \dot{x}_n(x_i, q_i), \quad (n = 0, \dots, k-2), \quad (2.50)$$

und

$$\dot{q}_n = -\frac{\partial H_n}{\partial y_n} = \dot{q}_n(x_i, q_i), \quad (n = 0, \dots, k-1), \quad (2.51)$$

folgt die Bewegungsgleichung (2.1), aus

$$\dot{y}_n = \frac{\partial H_n}{\partial p_n} = \dot{y}_n(y_i, p_i), \quad (n = 0, \dots, k-1), \quad (2.52)$$

und

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H_n}{\partial x_n} = \dot{p}_n(y_i, p_i), \quad (n = 0, \dots, k-2), \quad (2.53)$$

die adjungierte Gleichung (2.12). Die Gleichungen (2.50) bis (2.53) zeigen, daß auch für Bewegungsgleichungen ungerader Ordnung die Liouvillegleichung bzgl. der Variablen (x_n, q_n) und (y_n, p_n) separiert, und sich Gleichungen der Form (2.44) und (2.45) ergeben. Die explizite Form für gerade und ungerade Ordnung und die Diskussion dieser Gleichungen werden Gegenstand des nächsten Kapitels sein.

Kap. 3 Die verallgemeinerte Liouvillegleichung

§1 Die Kontinuitätsgleichung offener Systeme gerader Ordnung

Die Separation der Liouvillegleichung des abgeschlossenen Systems führt zur stochastischen Beschreibung der beiden zugehörigen offenen Systeme. Für den gedämpften HO liefert die Separation die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{GHO}(x, q, t) &= (\gamma q + m\omega^2 x) \frac{\partial}{\partial q} \rho_{GHO} \\ &- \left(\frac{\gamma}{m} - \mu x \right) \frac{\partial}{\partial x} \rho_{GHO} + \lambda(t) \rho_{GHO}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Für Systeme gerader Ordnung mit der Hamiltonfunktion (2.34) erhält man allgemein

$$\begin{aligned} N=2k \quad (k \in \mathbb{N}): \quad & \frac{\partial}{\partial t} \rho_1(x_n, q_n, t) \\ &= \left[\frac{a_{N-1}}{2a_N} q_{k-1} - (-1)^k (a_{N-2} - \frac{a_{N-1}^2}{4a_N}) x_{k-1} \right] \frac{\partial \rho_1}{\partial q_{k-1}} \\ &+ \left(\frac{a_{N-1}}{2a_N} x_{k-1} + \frac{(-1)^k}{a_N} q_{k-1} \right) \frac{\partial \rho_1}{\partial x_{k-1}} \\ &- \sum_{n=0}^{k-2} x_{n+1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_n} + \sum_{n=1}^{k-1} q_{n-1} \frac{\partial \rho_1}{\partial q_n} + \sum_{n=0}^{k-2} (-1)^n a_{2n} x_n \frac{\partial \rho_1}{\partial q_n} \\ &+ a \frac{\partial \rho_1}{\partial q_0} + \frac{a_1}{2} x_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial q_0} + \sum_{n=1}^{k-2} (-1)^n \left(\frac{a_{2n-1}}{2} x_{n-1} + \frac{a_{2n+1}}{2} x_{n+1} \right) \frac{\partial \rho_1}{\partial q_n} \\ &+ (-1)^{k-1} \frac{a_{N-3}}{2} x_{k-2} \frac{\partial \rho_1}{\partial q_{k-1}} + \lambda(t) \rho_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

für das dissipative System und eine Gleichung, die sich wegen der Symmetrie der Hamiltonfunktion nur in den Variablen und durch die Vorzeichen der Koeffizienten

a_{2n-1} ($n=1, \dots, k$) und der Funktion $\lambda(t)$ von Gl.(3.2) unterscheidet, für das zugehörige adjungierte System.

Gl.(3.2) liefert von vornherein keine stochastische Beschreibung des dissipativen Systems. Die Funktion $g_1(x_n, q_n)$ kann erst dann als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, wenn Normierbarkeit und Positivität garantiert sind. Um zu sehen, daß dies durch Anpassen der Funktion $\lambda(t)$ möglich ist, benötigen wir die folgende Identität (vgl. z.B. Ludwig /37/ S.29f):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{G_t} g(x_0, \dots, x_e, t) dx_0 \dots dx_e \\ = \int_{G_t} \left\{ \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{m=0}^e \frac{\partial}{\partial x_m} (\dot{x}_m g) \right\} dx_0 \dots dx_e, \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei G_t aus G_0 entsteht, indem die Randpunkte von G_0 durch die Abbildung $(x_0(0), \dots, x_1(0)) \mapsto (x_0(t), \dots, x_1(t))$ auf die Randpunkte von G_t abgebildet werden.

Die Identität (3.2) zeigt, daß eine Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x_0, \dots, x_e, t) + \sum_{m=0}^e \frac{\partial}{\partial x_m} (\dot{x}_m g) = 0 \quad (3.4)$$

eine stochastische Beschreibung liefert. Denn für positive Anfangsverteilung $g(x_n, 0) \geq 0$ führt die Annahme der Existenz eines Tupels (x_n^0, t_0) mit $g(x_n^0, t_0) \neq 0$ sofort zu einem Widerspruch, wenn wir stetiges $g(x_n, t)$ voraussetzen - eine Voraussetzung, die für Wahrscheinlichkeitsdichten gegeben sein sollte. Wegen der Stetigkeit von g folgt nämlich die Existenz einer Umgebung U_{t_0} von (x_n^0) mit der Eigenschaft: $g(x_n, t_0) \neq 0$ für alle $(x_n) \in U_{t_0}$ und

$$\int_{U_{t_0}} g(x_n, t_0) dx_0 \dots dx_e \neq 0. \quad (3.5)$$

Wegen (3.2) und (3.3) gilt dann

$$\int_{U_0} g(x_n, 0) dx_0 \dots dx_e \neq 0, \quad (3.6)$$

was im Widerspruch zu der Voraussetzung positiver Anfangsverteilung steht. Gl.(3.4) garantiert also die Positivität von ϱ .

Wenn wir uns - von der Wahrscheinlichkeitsinterpretation vernünftigerweise - auf Lösungen der Gl.(3.4) beschränken, für deren Wahrscheinlichkeitsstrom $\underline{j}$ ($\underline{j}^T := (\dot{x}_0 \varrho, \dots, \dot{x}_1 \varrho)$) im Unendlichen der Zu- und Abfluß gleich groß ist, deren Wahrscheinlichkeitsstrom z.B. im Unendlichen verschwindet, so garantiert Gl.(3.4) auch die Normierbarkeit. Denn es folgt

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^e} \varrho(x_n, t) dx_0 \dots dx_e = - \int_{\mathbb{R}^e} \left[\sum_{n=0}^e \frac{\partial}{\partial x_n} (\dot{x}_n \varrho) \right] dx_0 \dots dx_e, \quad (3.7)$$

wobei das rechte Integral mit Hilfe des Stokesschen Satzes in ein Oberflächenintegral umgeformt werden kann und wegen unserer Voraussetzung verschwindet. $\int_{\mathbb{R}^e} \varrho(x_n, t) dx_0 \dots dx_1$ ist also zeitunabhängig und auf 1 normierbar.

Der bekannte Zusammenhang zwischen der Kontinuitätsgleichung (3.4) und der Wahrscheinlichkeitsinterpretation wurde hier noch einmal deutlich gemacht, um die Bedeutung der Kontinuitätsgleichung auch für die Fälle klar herauszustellen, für die es nicht möglich ist, (3.4) in eine Liouvillegleichung umzuschreiben. Es wird sich zeigen, daß die offenen LS zu diesen Fällen zählen, so daß wir hier mit der Kontinuitätsgleichung zufrieden sein müssen. Die Dynamik in Form solcher einer Gleichung zu beschreiben, wird durch geeignete Wahl der Funktion $\lambda(t)$ möglich.

In Gl.(3.2) können bis auf die Terme $\frac{a_{N-1}}{2a_N} x_{N/2-1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_{N/2-1}}$ und $\frac{a_{N-1}}{2a_N} a_{N/2-1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial a_{N/2-1}}$ in allen Summanden die Faktoren unter die folgenden partiellen Ableitungen gezogen werden. Addiert man zu diesen beiden Termen

$$\lambda(t) \varrho_1 := \frac{a_{N-1}}{a_N} \varrho_1, \quad (3.8)$$

d.h. im Falle des gedämpften HO $\lambda(t) = 2\gamma$, so kann die Summe in der Form

$$\frac{\partial}{\partial k_{N/2-1}} \left(\frac{a_{N-1}}{2a_N} k_{N/2-1} f_1 \right) + \frac{\partial}{\partial q_{N/2-1}} \left(\frac{a_{N-1}}{2a_N} q_{N/2-1} f_1 \right) \quad (3.9)$$

geschrieben werden. Wählen wir $\lambda(t)$ gemäß (3.8), ist die Gl.(3.2) die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial k_n} (\dot{x}_n f_1) + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial q_n} (\dot{q}_n f_1) = 0. \quad (3.10)$$

Die Wahl (3.8) für $\lambda(t)$ garantiert auch, daß sich die adjungierte Gleichung in den Variablen y_n , p_n nur noch durch die Vorzeichen der Koeffizienten a_{2n-1} ($n=1, \dots, k$) von der Gl.(3.2) unterscheidet und deshalb auch eine Kontinuitätsgleichung ist. Diese Gleichungen können wir zur Grundlage der Dynamik offener Systeme machen. Wir nennen sie verallgemeinerte Liouvillegleichungen - ein Name, der in der Literatur oft für entsprechende quantenmechanische Gleichungen gewählt wurde.

§2 Die quantisierbare Form der verallgemeinerten Liouvillegleichung

Schreibt man die verallgemeinerte Liouvillegleichung (3.1) des gedämpften HO auf die Variablen x und $v = \frac{q}{m} - \gamma x$ um, so erhält man die Kontinuitätsgleichung in den neuen Variablen. Diese Aussage läßt sich auf Gl.(3.10) ausdehnen. Gl.(3.10) ist in den Variablen $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(N-1)}$ nichts anderes als

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_1(x^{(0)}, \dots, x^{(N-1)}, t) = - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x^{(n)}} (\dot{x}^{(n)} \tilde{f}_1) \quad (3.11)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_1(x^{(0)}, \dots, x^{(N-1)}, t) = - \sum_{n=0}^{N-2} x^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial x^{(n)}} \tilde{f}_1 - \frac{\partial}{\partial x^{(N-1)}} (x^{(N)} \tilde{f}_1). \quad (3.12)$$

Denn der Zusammenhang zwischen den x_i , q_i ($i=0, \dots, k-1$) und den $x^{(n)}$ ($n=0, \dots, 2k-1$) ist linear und bijektiv, und für jede lineare Transformation

$$x_i \mapsto y_i = \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} x_j, \quad (i=1, \dots, \ell), \quad \det(a_{ij}) \neq 0, \quad (3.13)$$

folgt aus

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{S}_1(x_1, \dots, x_\ell, t) = - \sum_{\mu=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\dot{x}_\mu \mathcal{S}_1) : \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{S}}_1(y_1, \dots, y_\ell, t) &= - \sum_{\mu, i, j} a_{i\mu} \frac{\partial}{\partial y_i} ((a^{-1})_{\mu j} \dot{y}_j \tilde{\mathcal{S}}_1) \\ &= - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial y_i} (\dot{y}_i \tilde{\mathcal{S}}_1), \end{aligned} \quad (3.15)$$

und Positivität der Wahrscheinlichkeitsdichte und Normierbarkeit bleiben beim Übergang von $\mathcal{S}_1$ zu $\tilde{\mathcal{S}}_1$ erhalten.

Wir können also ohne Umweg über das abgeschlossene System zur verallgemeinerten Liouvillegleichung gelangen, indem wir einfach Gl.(3.12) hinschreiben. Und dies ist für beliebige Bewegungsgleichungen $x^{(N)} = x^{(N)}(x^{(0)}, \dots, x^{(N-1)})$ möglich. Der Umweg über das abgeschlossene System hat nur dazu geführt, daß die verallgemeinerte Liouvillegleichung in den Variablen x_i, q_i geschrieben erscheint. Dies ist aber bei der Auswahl der kanonischen Paare im Hinblick auf die Quantisierung von Bedeutung, so daß wir bisher noch auf den Umweg über das abgeschlossene System, d.h. auf die Beschränkung auf LS, angewiesen sind. Erst wenn die Theorie der LS lehrt, in welchen Variablen die Gl. (3.12) geschrieben werden muß, ist eine Verallgemeinerung auf beliebige Systeme möglich.

Im Hinblick auf die Quantisierung werden wir die Paare (x_n, q_n) als kanonische Paare behandeln, da dies zumindest für den nichtdissipativen Grenzfall mit $a_{2n-1}=0$ ($n=1, \dots, k$) zur gewöhnlichen Formulierung, die von der Lagrangefunktion (2.10) ausgeht, zurückführt. Für den HO z.B. gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{S}_{HO}(x, q, t) = \left\{ \frac{q^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2, \mathcal{S}_{HO} \right\}_{(x, q)}. \quad (3.16)$$

Nach der früheren Separation und dem jetzigen Vertauschen der kanonischen Paare ist an dieser Stelle erst der Umweg über das abgeschlossene System, in dem kinetischer und kanonischer Impuls verschiedener Systeme verknüpft waren, beendet.

Mit dem kanonischen Paar (x, q) läßt sich die verallgemeinerte Liouvillegleichung des gedämpften HO in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{GH0} &= \{ \omega a^+ a^-, \rho_{GH0} \}_{(x, q)} \\ &+ i \gamma \left(\{ a^-, \rho_{GH0} a^+ \}_{(x, q)} + \{ a^- \rho_{GH0}, a^+ \}_{(x, q)} \right) \\ &= : -i \mathcal{L}_{GH0}(\rho_{GH0}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

mit

$$a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (q \pm i m \omega x) \quad (3.18)$$

und dem klassischen Liouvilleoperator $\mathcal{L}_{GH0}$ schreiben.

Denn für die erste Poissonklammer erhält man analog zum HO

$$\{ \omega a^+ a^-, \rho_{GH0} \}_{(x, q)} = m \omega^2 x \frac{\partial}{\partial q} \rho_{GH0} - \frac{q}{m} \frac{\partial}{\partial x} \rho_{GH0} \quad (3.19)$$

und für den Dissipationsterm

$$\begin{aligned} i \gamma \left(\{ a^-, \rho_{GH0} a^+ \}_{(x, q)} + \{ a^- \rho_{GH0}, a^+ \}_{(x, q)} \right) \\ = \gamma q \frac{\partial}{\partial q} \rho_{GH0} + \gamma x \frac{\partial}{\partial x} \rho_{GH0} + 2 \dot{\gamma} \rho_{GH0}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Gl.(3.17) ist nichts weiter als Gl.(3.1) in einer anderen Form. Die Form (3.17) ist nur insofern interessant, als sie, wie die Quantisierung des gedämpften HO zeigen wird,

die formale Ähnlichkeit zwischen klassischer und quantenmechanischer Theorie deutlich unterstreicht.

Für LS, deren Koeffizienten a_{2n-1} bis auf a_{2k-1} verschwinden, läßt sich die verallgemeinerte Liouvillegleichung in einer Gl.(3.17) ähnlichen Form schreiben. Denn nach Gl.(3.2) sind die Terme, die nur x_{k-1} und q_{k-1} enthalten, bis auf die Substitution $q \rightarrow q_{k-1}$, $x \rightarrow x_{k-1}$, $m \rightarrow (-1)^{k-1} a_N$, $2\gamma m \rightarrow (-1)^{k-1} a_{N-1}$, $m\omega_0^2 \rightarrow (-1)^{k-1} a_{N-2}$ gleich denen des gedämpften HO und lassen sich zusammen mit $a_{N-1} \int_1 / a_N$ als $-i \mathcal{L}_{\text{GHO}}^k(\int_1)$ schreiben, wobei sich der klassische Liouvilleoperator $\mathcal{L}_{\text{GHO}}^k$ durch die obige Substitution von $\mathcal{L}_{\text{GHO}}$ unterscheidet. Die restlichen Terme lassen sich auf die Form $\{H^k, \int_1\}$ mit

$$H^k = \sum_{n=0}^{k-2} q_n x_{n+1} + q x_0 + \sum_{n=0}^{k-2} \frac{(-1)^n}{2} a_{2n} x_n^2 \quad (3.21)$$

bringen.

Speziell für $N=4$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = & \left\{ \omega_1 a_1^+ a_1^- + q_0 x_1 + q x_0 + \frac{q_0 x_0^2}{2}, \int_1 \right\}_{(x_n, q_n)} \\ & + i \frac{q_{N-1}}{2 a_N} \left(\{ a_1^-, \int_1 a_1^+ \}_{(x_n, q_n)} + \{ a_1^-, \int_1, a_1^+ \}_{(x_n, q_n)} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

mit

$$a_1^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{-2a_4\omega_1}} (q_1 \mp i a_4 \omega_1 x_1) \quad (3.23)$$

und

$$\omega_1^2 = \frac{q_{N-2}}{a_N} - \frac{q_{N-1}^2}{4a_N^2} \quad (3.24)$$

§3 Die Lösung der verallgemeinerten Liouvillegleichung

Die Lösung der Gl.(3.22), der Gl.(3.17) oder allgemein

der Gl.(3.2) mit Nebenbedingung (3.8) beschreibt den Zustand des dissipativen Systems im Sinne von Mehra und Sudarshan /40/. Mehra und Sudarshan verstehen unter einem klassischen Zustand eine dynamische Bedingung, die jeder Funktion der Koordinaten und Impulse unter Aufrechterhaltung von Linearität und Positivität eine reelle Zahl zuordnet. In unserem Fall ist durch f_1 solch eine Zuordnungsvorschrift gegeben und zwar:

$$F(x_n, q_n) \mapsto \int F(x_n, q_n) f_1(x_n, q_n, t) dx_0 \dots dq_{k-1}. \quad (3.25)$$

Im Gibbschen Sinne beschreibt Gl.(3.2) ein Ensemble, dessen Phasenraumpunkte sich gemäß der Abbildung $(x_n(0), q_n(0)) \mapsto (x_n(t), q_n(t))$ entwickeln. Entlang einer Phasenbahn ist f_1 nicht wie im Hamiltonschen Fall konstant, sondern es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_1(x_n, q_n, t) &= \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{n=0}^{k-1} \dot{x}_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \sum_{n=0}^{k-1} \dot{q}_n \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ &= \lambda(t) f_1 = \frac{a_{N-1}}{a_N} f_1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

f_1 wächst also entlang einer Phasenbahn wie $\exp(\frac{a_{N-1}}{a_N} t)$. Dieses Anwachsen kompensiert gerade das Schrumpfen des Gebiets G_t , so daß die Integration von f_1 über G_t gemäß (3.3) und (3.10) konstant bleibt.

Am Beispiel des gedämpften HO können die vorhergehenden Aussagen konkretisiert werden. In diesem Fall lautet die Lösung der Bewegungsgleichung

$$x(t) = e^{-\gamma t} (x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{m\omega} \sin \omega t). \quad (3.27)$$

Damit erhält man

$$q(t) = e^{-\gamma t} (q_0 \cos \omega t - m\omega x_0 \sin \omega t) \quad (3.28)$$

und für die Jacobische Determinante

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x(t)}{\partial x_0} & \frac{\partial q(t)}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x(t)}{\partial q_0} & \frac{\partial q(t)}{\partial q_0} \end{array} \right| = e^{-2\gamma t} . \quad (3.29)$$

Das Anwachsen von ρ_{GHO} um den Faktor $e^{2\gamma t}$ nach Gl.(3.26) wird also gerade durch die Verkleinerung des Phasenraumgebiets G_0 kompensiert.

Die verallgemeinerte Liouvillegleichung sorgt also dafür, daß die Wahrscheinlichkeit, ein Gibbssches Ensemble, das sich gemäß $(x_n(t), q_n(t))$ entwickelt, zur Zeit $t=0$ im Gebiet G_0 zu finden, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, das Ensemble zur Zeit t im Gebiet G_t zu finden. Das ist genau das, was wir von einer stochastischen Beschreibung erwarten, und gilt auch für den Fall einer δ -funktionsartigen Verteilung. Denn

$$\rho_1(x_n, t) = \prod_n \delta(x_n - x_n^0(t)) \quad (3.30)$$

mit $\dot{x}_n^0(t) = \dot{x}_n(x_j^0(t))$ ist Lösung der Kontinuitätsgleichung, da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= - \sum_n \dot{x}_n^0 \frac{\partial}{\partial x_{n1}} \prod_i \delta(x_i - x_i^0(t)) = - \sum_n \frac{\partial}{\partial x_{n1}} \dot{x}_n^0 \prod_i \delta(x_i - x_i^0(t)) \\ &= - \sum_n \frac{\partial}{\partial x_{n1}} \dot{x}_n(x_j^0(t)) \prod_i \delta(x_i - x_i^0(t)) \quad (3.31) \\ &= - \sum_n \frac{\partial}{\partial x_{n1}} \dot{x}_n(x_j) \prod_i \delta(x_i - x_i^0(t)) = - \sum_n \frac{\partial}{\partial x_{n1}} (\dot{x}_n(x_j) \rho_1) \end{aligned}$$

gilt.

Für die Entropie $S(t) = - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_1 \ln \rho_1 dx^{(0)} \dots dx^{(N-1)}$ gilt mit Gl.(3.11) schließlich

$$\frac{dS}{dt} = - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \ln \rho_1 + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right) dx^{(0)} \dots dx^{(N-1)} = \quad (3.32)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x^{(k)}} (\dot{x}^{(k)} \tilde{f}_1) \right] \ln \tilde{f}_1 dx^{(0)} \dots dx^{(N-1)},$$

da das zweite Integral nach Gl.(3.11) und dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral umgeschrieben werden kann, das nach Voraussetzung gleich null sein soll. Aus dem gleichen Grund erhalten wir jetzt nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= - \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{x}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x^{(k)}} \tilde{f}_1 dx^{(0)} \dots dx^{(N-1)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial t} - \frac{a_{N-1}}{a_N} \tilde{f}_1 \right] dx^{(0)} \dots dx^{(N-1)} \quad (3.33) \\ &= - \frac{a_{N-1}}{a_N}. \end{aligned}$$

Für den gedämpften HO gilt

$$\frac{dS}{dt} = -2\gamma < 0. \quad (3.34)$$

Die Entropie nimmt also ab, wie wir es bei einem dissipativen Prozeß auch erwarten. Denn die Dissipation ordnet und sorgt dafür, daß sich für $t \rightarrow \infty$ alle gedämpften HO eines Ensembles im Phasenraumpunkt $(x, q) = (0, 0)$ befinden.

§4 Die verallgemeinerte Liouvillegleichung offener Systeme ungerader Ordnung

Mit der Hamiltonfunktion (2.48) führt die Separation der Liouvillegleichung des abgeschlossenen Systems zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S_{SWO}(x_0, q_0, q_1, t) &= -\frac{1}{2\pi} q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} S_{SWO} + q_0 \frac{\partial}{\partial q_0} S_{SWO} \\ &\quad - \frac{1}{2m\pi} q_1 \frac{\partial}{\partial x_0} S_{SWO} + m\omega^2 x_0 \frac{\partial}{\partial q_0} S_{SWO} + \lambda(t) S_{SWO} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Wählen wir $\lambda(t) = -\frac{1}{2\pi}$, ist Gl.(3.35) eine Kontinuitäts-

gleichung und damit die verallgemeinerte Liouvillegleichung des strahlungsgedämpften HO. Aus der Ableitung (3.33) folgt, daß die Entropie für den strahlungsgedämpften HO wächst, Gl.(3.35) also keinen dissipativen Prozeß beschreibt. D.h. die Lösung der verallgemeinerten Liouvillegleichung des strahlungsgedämpften HO entspricht der "run-away"-Lösung der Bewegungsgleichung, die ein Anwachsen der Beschleunigung beschreibt.

Im allgemeinen folgt für Systeme ungerader Ordnung aus der Hamiltonfunktion (2.49) durch Separation der Liouvillegleichung

$$\begin{aligned}
 N=2k-1 \quad (k \in \mathbb{N}): \quad & \frac{\partial}{\partial t} \rho_1(x_n, q_n, t) \\
 = & \sum_{n=1}^{k-1} q_{n-1} \frac{\partial \rho_1}{\partial q_n} - \sum_{n=0}^{k-3} x_{n+1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_n} \\
 & + \frac{a_{N-1}}{a_N} q_{k-1} \frac{\partial \rho_1}{\partial q_{k-1}} - \frac{a_{N-2}}{2a_N} q_{k-1} \frac{\partial \rho_1}{\partial q_{k-2}} + \frac{(-1)^k}{a_N} q_{k-1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_{k-2}} \\
 & + \sum_{n=0}^{k-2} (-1)^n \frac{a_{2n}}{2} x_n \frac{\partial \rho_1}{\partial q_n} + \sum_{n=0}^{k-3} (-1)^n \frac{a_{2n+1}}{2} x_{n+1} \frac{\partial \rho_1}{\partial q_n} \\
 & - \sum_{n=1}^{k-2} (-1)^n \frac{a_{2n-1}}{2} x_{n-1} \frac{\partial \rho_1}{\partial q_n} + a_N \frac{\partial \rho_1}{\partial q_0} \\
 & + (-1)^k a_{N-3} x_{k-2} \frac{\partial \rho_1}{\partial q_{k-2}} - (-1)^k \frac{a_{N-2}}{2} x_{k-2} \frac{\partial \rho_1}{\partial q_{k-1}} + \lambda(t) \rho_1.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Auch in Gl.(3.36) können alle Faktoren bis auf die in dem Term $\frac{a_{N-1}}{a_N} q_{k-1} \frac{\partial \rho_1}{\partial q_{k-1}}$ unter die ihnen folgenden Ableitungen gezogen werden. Mit $\lambda(t) = a_{N-1}/a_N$ ist also Gl.(3.36) eine Kontinuitätsgleichung. Genau wie im Fall gerader Ordnung läßt sich auch hier zeigen, daß diese Kontinuitätsgleichung bei Variablentransformation in die bzgl. der Variablen $(x^{(0)}, \dots, x^{(N-1)})$ übergeht. Die klassische StD ungerader Systeme ist also der gerader Systeme analog.

TEIL 2 STOCHASTISCHE QUANTENMECHANIKKap. 4 Prinzipien der stochastischen Quantenmechanik

§1 Die dissipative von Neumannsche Gleichung

Um ein Quantisierungsprogramm für die klassische StD vorschlagen zu können, ist es notwendig die Grundgleichung der StQM, zu der die Quantisierung führen soll, zu kennen. Seit den Arbeiten Gorinis et al. /20/ und Lindblads /36/ existiert eine Gleichung, die sich für unseren Zweck anbietet. Um die Prinzipien, aus denen diese Gleichung folgt, deutlich zu machen und damit auch jene, die im Hinblick auf die Quantisierung der klassischen StD noch hinzutreten müssen, soll Bopp (priv. Mitt.) folgend und der Arbeit Gorinis et al. /20/ ähnlich diese Gleichung hier erneut abgeleitet werden.

Bei der Ableitung beschränken wir uns auf Operatoren, die durch endliche $\Omega \times \Omega$ -Matrizen dargestellt werden können, wenden unsere Ergebnisse aber auch auf Operatoren an, die Funktionen der kanonischen Paare $(\hat{x}_n, \hat{q}_n)$ sind. Für den gedämpften HO findet diese Verallgemeinerung innerhalb der Theorie des Hilbertraums ihre Rechtfertigung. Bopp (priv. Mitt.) mißt dem elementar algebraischen Rechnen mit $\Omega \times \Omega$ -Matrizen aber noch eine Bedeutung zu, die über die herkömmliche Theorie des Hilbertraums hinausreicht. Er schlägt vor, physikalische Größen durch unendliche Folgen von $\Omega \times \Omega$ -Matrizen darzustellen und nicht nach der Konvergenz sondern nach ihrem asymptotischen Verhalten zu fragen. Konvergenz soll nur für die Zahlenfolgen gefordert werden, die den Meßdaten entsprechen. Aus dieser Sicht gewinnt die folgende Ableitung für den allgemeinen Fall größere Bedeutung.

Da Dissipation im allgemeinen reine Gesamtheiten in gemischte überführt, kann die Ableitung keine Gleichung liefern, die der Schrödingergleichung ähnlich ist. Wir streben vielmehr eine Gleichung an, die die zeitliche

Entwicklung der Zustandsmatrix $\hat{g}$ beschreibt, die also im nichtdissipativen Grenzfall in die von Neumannsche Gleichung übergeht. Die Form der dissipativen von Neumann Gleichung ist durch die Bedingungen eingeschränkt, denen die Zustandsmatrix $\hat{g}$ genügen muß.

Sollen die Bedingungen an $\hat{g}$ die Wahrscheinlichkeitsinterpretation

$$w = u^+ \hat{g} u \left(:= \sum_{i,j=1}^n u_i^* \hat{g}_{ij} u_j \right) \quad (4.1)$$

mit normierten Vektoren u ($u^+ u = 1$) ermöglichen, indem sie dafür sorgen, daß Wahrscheinlichkeiten w reell und positiv sind, und ihre Summe gleich 1 ist, müssen wir

$$\hat{g} = \hat{g}^+ , \quad (4.2)$$

$$v^+ \hat{g} v \geq 0 \quad \text{für alle } v \quad (4.3)$$

und

$$\text{Sp } \hat{g} = 1 \quad (4.4)$$

fordern. Die Zeitgleichung muß dann so beschaffen sein, daß für die Lösung $\hat{g}(t)$ die Bedingungen (4.2) bis (4.4) erfüllt sind, falls sie für $\hat{g}(0)$ gelten.

Die Zeitgleichung muß darüberhinaus so beschaffen sein, daß die Superponierbarkeit statistischer Gesamtheiten gewährleistet ist. Diese Bedingung erfordert eine lineare Gleichung

$$\dot{\hat{g}}_{ij}(t) = \frac{1}{2} C_{ikje} \hat{g}_{ke}(t) . \quad (4.5)$$

Damit die Hermitezität von $\hat{g}$ erhalten bleibt, muß

$$C_{ikje} = C_{jeik}^* \quad (4.6)$$

gelten. Denn für beliebige $\hat{g}$ ist eine Gleichung von der Form

$$\sum_{i,j} A_{ij} g_{ji} = 0 \quad (4.7)$$

genau dann erfüllt, wenn $A_{ij}=0$ gilt.

Die $\Omega^2 \Omega^2$ -Matrix $\{C_{ik,jl}\}$ ist also hermitesch in den Indexpaaren (ik) und (jl). Sie besitzt deshalb ein vollständiges System orthonormaler Eigenvektoren $\hat{G}_r$ mit zugehörigen reellen Eigenwerten λ_r . D.h. es existieren $\hat{G}_r$ mit

$$Sp(\hat{G}_r \hat{G}_s^+) = \delta_{rs} \quad (4.8)$$

und

$$\sum_{r=1}^{\Omega^2} G_{ij}^r G_{kl}^{*r} = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad (4.9)$$

so daß

$$\dot{\hat{g}} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\Omega^2} \lambda_r \hat{G}_r \hat{g} \hat{G}_r^+ \quad (4.10)$$

gilt.

Damit die Spur von $\hat{g}(t)$ gleich 1 bleibt, muß

$$Sp \dot{\hat{g}}(t) = 0 \quad (4.11)$$

und deshalb

$$Sp \sum_{r=1}^{\Omega^2} \lambda_r \hat{G}_r^+ \hat{G}_r \hat{g} = 0 \quad (4.12)$$

gelten. Daraus folgt wie bei der Ableitung von Gl.(4.6)

$$\sum_{r=1}^{\Omega^2} \lambda_r \hat{G}_r^+ \hat{G}_r = 0. \quad (4.13)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ist es möglich, Gl.(4.10) in eine Form zu bringen, die sofort erkennen läßt, daß die

stochastische Bedingung (4.11) erfüllt ist. Und zwar gilt wegen (4.13)

$$\dot{\hat{J}} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\Omega^2} \lambda_r ([\hat{G}_r, \hat{J} \hat{G}_r^+] + [\hat{G}_r \hat{J}, \hat{G}_r^+]) \quad (4.14)$$

und dafür offensichtlich (4.11), da die Spur jedes Kommutators $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ verschwindet.

Die G_r können wir nun bzgl. eines beliebigen vollständigen Orthonormalsystems entwickeln:

$$\hat{G}_m = \sum_{n=1}^{\Omega^2} a_{nr} \hat{F}_r. \quad (4.15)$$

Gl.(4.14) erhält dann die Form

$$\dot{\hat{J}} = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{\Omega^2} c_{rs} ([\hat{F}_r, \hat{J} \hat{F}_s^+] + [\hat{F}_r \hat{J}, \hat{F}_s^+]) \quad (4.16)$$

mit Koeffizienten

$$c_{rs} = \sum_{n=1}^{\Omega^2} \lambda_n a_{nr} a_{ns}^* = c_{sr}^*. \quad (4.17)$$

Da die λ_n wegen Gl.(4.13) nicht alle positiv sein können, kann die $\Omega^2 \times \Omega^2$ -Matrix $\{c_{rs}\}$ nicht positiv definit sein. Dies ist im Zusammenhang mit dem Inhalt des nächsten Paragraphen von Interesse.

Da (4.16) für jedes vollständige Orthonormalsystem gilt, ist es insbesondere möglich, eins zu wählen, das die Identität enthält. Sei $\{\hat{F}_r\}$ von dieser Form, d.h. gelte u.a.

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\hat{F}_r) &= 0, \quad \text{Sp}(\hat{F}_r \hat{F}_s^+) = \delta_{rs}, \\ (r, s &= 1, \dots, \Omega^2 - 1), \end{aligned} \quad (4.18)$$

so können wir

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\Omega^2-1} (c_{r\Omega} \hat{F}_r - c_{r\Omega}^* \hat{F}_r^+) = \hat{H}^+ \quad (4.19)$$

wählen und damit

$$\begin{aligned} \dot{\hat{f}} = -i [\hat{H}, \hat{f}] + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{N-1} c_{rs} ([\hat{\mathcal{T}}_r, \hat{f} \hat{\mathcal{T}}_s^+ \\ + [\hat{\mathcal{T}}_r \hat{f}, \hat{\mathcal{T}}_s^+]) =: \hat{\mathcal{L}}(\hat{f}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

mit dem dissipativen Liouvilleoperator $\hat{\mathcal{L}}$ ableiten.

Aus der Zeitgleichung im Schrödingerbild kann die Zeitgleichung im Heisenbergbild abgeleitet werden. Die dynamische Transformation Λ_t im Schrödingerbild

$$\Lambda_t : \hat{f}(0) \mapsto \Lambda_t \hat{f}(0) = \hat{f}(t) \quad (4.21)$$

ist dabei mit derjenigen im Heisenbergbild

$$\Lambda_t^* : \hat{A}(0) \mapsto \Lambda_t^* \hat{A}(0) = \hat{A}(t) \quad (4.22)$$

über die Identität

$$\text{Sp}((\Lambda_t \hat{f}) \hat{A}) = \text{Sp}(\hat{f} (\Lambda_t^* \hat{A})) \quad (4.23)$$

verknüpft.

Aus Gl.(4.23) folgt durch Differentiation für die entsprechenden Liouvilleoperatoren

$$\text{Sp}(\hat{\mathcal{L}}(\Lambda_t \hat{f}) \hat{A}) = \text{Sp}(\hat{f} \hat{\mathcal{L}}^*(\Lambda_t^* \hat{A})) \quad (4.24)$$

speziell für $t=0$ also

$$\text{Sp}(\hat{\mathcal{L}}(\hat{f}) \hat{A}) = \text{Sp}(\hat{f} \hat{\mathcal{L}}^*(\hat{A})) \quad (4.25)$$

für alle $\hat{f}$ und $\hat{A}$. Da $\hat{\mathcal{L}}^*$ über Gl.(4.25) eindeutig bestimmt ist, ist der Operator, der bei vorgegebener $\hat{\mathcal{L}}$ Gl.(4.25) erfüllt, auch genau der Generator der dynamischen Transformation im Heisenbergbild. Für Gl.(4.20) liefert das

$$\begin{aligned} \dot{\hat{A}} = i [\hat{H}, \hat{A}] + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{Q^2-1} c_{rs} (\hat{F}_s^+ [\hat{A}, \hat{F}_r] \\ + [\hat{F}_s^+, \hat{A}] \hat{F}_r) = \mathcal{L}^*(\hat{A}). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Damit ist die Form der dissipativen von Neumannschen Gleichung (Gl.(4.20)) auf eine Gorini et al. /20/ ähnliche Weise hergeleitet und die der entsprechenden Gleichung im Heisenbergbild (Gl.(4.26)) angegeben. Eine Verallgemeinerung für beschränkte Operatoren im unendlich dimensionalen Hilbertraum stammt von Lindblad /36/. Die stochastische Bedingung (4.3) der Positivität von $\hat{\mathcal{L}}$ auszunutzen, steht aber noch aus. Die Diskussion dieser Bedingung, ihre Verschärfung und ihre Ausnutzung zur Einschränkung der c_{rs} sind Gegenstand des nächsten Paragraphen.

§2 Positivität und vollständige Positivität

Daß die $Q^2 \times Q^2$ -Matrix $\{c_{ij}\}$, $(i,j=1,\dots,Q^2)$, nicht positiv definit sein kann, folgte aus Gl.(4.13). Die $Q^2-1 \times Q^2-1$ -Matrix $\{c_{ij}\}$, $(i,j=1,\dots,Q^2-1)$, kann aber dennoch positiv definit sein, und genau das werden wir, wie die Diskussion in diesem Paragraphen zeigen wird, aus physikalischen Gründen fordern müssen. Die Bedingung (4.3) ist allerdings zu schwach, um die Positivität der Matrix zu garantieren. Die Bedingung ist aber auch von vornherein zu schwach, um den physikalischen Anforderungen an eine dynamische Transformation gerecht werden zu können.

Denn eine dynamische Transformation für ein System S sollte nicht nur positiv sein, sondern auch garantieren, daß die dynamische Transformation zweier ungekoppelter Systeme S und S' wieder positiv ist. Dies sollte insbesondere der Fall sein, wenn das zweite System endlich viele Freiheitsgrade n hat, und seine Dynamik die triviale mit $\hat{H}' = \hat{I}$ ist. Ist dies der Fall, ist also nicht nur A_t positiv sondern auch für alle $n A_t \otimes \hat{I}_n$ mit der $n \times n$ -

Einheitsmatrix $\hat{I}_n$, so nennen wir die dynamische Transformation vollständig positiv.

Für ein Spin-1/2-Isospin-1/2-System z.B. fordern wir also Folgendes: Wird die Dynamik bzgl. des Spins durch Λ_t , das die 2×2 -Zustandsmatrizen auf ebensolche abbildet, beschrieben, die Dynamik bzgl. des Isospins durch die triviale dynamische Transformation $\Lambda'_t = \hat{I}_2$, die Dynamik des ungekoppelten Gesamtsystems also durch

$$\Lambda_t \otimes \hat{I}_2: \hat{\Sigma} := \begin{pmatrix} \hat{g}_1 & \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 & \hat{g}_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Lambda_t(\hat{g}_1) & \Lambda_t(\hat{g}_2) \\ \Lambda_t(\hat{g}_3) & \Lambda_t(\hat{g}_4) \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

so soll für positive $\hat{\Sigma}$ auch $(\Lambda_t \otimes \hat{I}_2)(\hat{\Sigma})$ positiv sein.

Für die Hamiltonsche Dynamik ist die Bedingung der vollständigen Positivität immer erfüllt. Denn die dynamische Transformation, die durch den Hamiltonoperator $\hat{H} + \hat{I}_n$ gegeben ist, ist positiv. Im allgemeinen ist aber eine positive Abbildung nicht vollständig positiv, wie das Beispiel der Abbildung

$$\Lambda: M(2) \rightarrow M(2) \quad \text{vermöge} \quad (4.28)$$

$$\hat{g} \mapsto \Lambda(\hat{g}) = (\text{Sp } \hat{g}) \hat{I}_2 - \hat{g}$$

zeigt (vgl. Choi /12/). ($M(\Omega)$ ist der Raum der $\Omega \times \Omega$ -Matrizen.)

Denn Λ ist positiv, da für alle $u \in \mathbb{C}^2$ mit $u^+ u = 1$

$$u^+ \Lambda(\hat{g}) u = u^+ \hat{g} u + v^+ \hat{g} v - u^+ \hat{g} u = v^+ \hat{g} v \quad (4.29)$$

mit $v^+ u = 0$ und $v^+ v = 1$ gilt, also

$$u^+ \Lambda(\hat{g}) u \geq 0 \quad \text{für} \quad v^+ \hat{g} v \geq 0 \quad (4.30)$$

folgt. $\hat{\Lambda}$ ist darüberhinaus auch linear, hermitezität- und spurerhaltend.

Aber $\hat{\Lambda}$ ist nicht vollständig positiv. Um dies zu sehen, definieren wir

$$\hat{E} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \sum_{i,j=1}^2 \hat{E}_{ij} \otimes \hat{E}_{ij} \quad (4.31)$$

$$\in M(2) \otimes M(2)$$

und beachten, daß $\hat{E}$ positiv ist, da für $u \in \mathbb{C}^4$

$$u^+ \hat{E} u = (\mu_1^* + \mu_4^*)(u_1 + u_4) \geq 0 \quad (4.32)$$

gilt. ($\hat{E}_{ij}$ ist dabei die Matrix mit den Elementen $(\hat{E}_{ij})_{mn} = \delta_{im} \delta_{jn}$.)

$(\hat{\Lambda} \otimes \hat{I}_2)(\hat{E})$ ist nun aber nicht positiv, da

$$\begin{aligned} (\hat{\Lambda} \otimes \hat{I}_2)(\hat{E}) &= \begin{pmatrix} \hat{I}_2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \hat{I}_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.33) \\ &= \hat{I}_4 - \hat{E} \end{aligned}$$

und

$$\hat{E}^2 = 2 \hat{E} \quad (4.34)$$

gilt, $\hat{E}$ also einen Eigenvektor v mit Eigenwert 2 besitzt, so daß

$$v^+ (\hat{\Lambda} \otimes \hat{I}_2)(\hat{E}) v = 1 - v^+ \hat{E} v = -1 < 0 \quad (4.35)$$

folgt.

Vollständige Positivität ist also mehr als Positivität und eine Verschärfung, die wir aus physikalischen Gründen fordern müssen. Für unsere dynamische Transformation $\Lambda_t: M(\Omega) \rightarrow M(\Omega)$ genügt es aber, die Positivität für $\Lambda_t \otimes \hat{I}_\Omega$ zu fordern, da dies die Positivität von $\Lambda_t \otimes \hat{I}_n$ für alle n garantiert (vgl. Choi /12/). Da $\hat{\mathcal{L}}$ genau dann der Generator einer positiven und spurerhaltenden dynamischen Transformation ist, wenn

$$\text{Sp}(\hat{\mathcal{P}}_r \hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathcal{P}}_s)) \geq 0 \quad \text{für } r \neq s \quad (4.36)$$

und

$$\text{Sp}(\hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathcal{P}}_s)) = 0 \quad (4.37)$$

gilt für alle Familien $\{\hat{\mathcal{P}}_1, \dots, \hat{\mathcal{P}}_\Omega\}$ orthogonaler, eindimensionaler, selbstadjungierter Projektionen in $M(\Omega)$:

$$\hat{\mathcal{P}}_i \hat{\mathcal{P}}_j = \delta_{ij} \hat{\mathcal{P}}_i, \quad \hat{\mathcal{P}}_i = \hat{\mathcal{P}}_i^+, \quad \sum_{i=1}^{\Omega} \hat{\mathcal{P}}_i = \hat{I}_\Omega \quad (4.38)$$

(vgl. Kossakowski /32/), fordern wir die Bedingung (4.36) und (4.37) für $\hat{\mathcal{L}} \otimes \hat{I}_\Omega$ mit dem dissipativen Liouvilleoperator $\hat{\mathcal{L}}$ aus Gl.(4.20).

Daß die Bedingung (4.37) notwendig und hinreichend für $\text{Sp} \hat{\mathcal{P}}(t) = 1$ ist, ist wegen $\hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathcal{P}})$ klar, daß (4.36) notwendig für die Positivität der Wahrscheinlichkeiten ist, ergibt sich folgendermaßen: Für $\hat{\mathcal{P}}(t) = \hat{\mathcal{P}}_s$ ist $\text{Sp}(\hat{\mathcal{P}}_r \hat{\mathcal{P}}_s)$ ($r \neq s$) gleich null und kann wegen der Positivität der Wahrscheinlichkeiten nur steigen, so daß (4.36) gilt. Wird andererseits (4.36) vorausgesetzt, so folgt für die Eigenvektoren u_n von $\hat{\mathcal{P}}(t)$

$$\sum_m u_m^+ \hat{\mathcal{P}} u_m \geq 0 \quad (4.39)$$

aus der Positivität von $\hat{\mathcal{P}}(0)$, da für $u_n^+ \hat{\mathcal{P}} u_n = 0$ und $u_m^+ \hat{\mathcal{P}} u_m \geq 0$, ($n \neq m$), wegen

$$u_m^+ \hat{g} u_m = \text{Sp} \left(\hat{P}_m \hat{L} \left(\sum_{m \neq n} x_m \hat{P}_m \right) \right) \geq 0 \quad (4.40)$$

$\hat{g}_{nn}$ nur wachsen kann. Daraus folgt für beliebige Vektoren u , daß $\hat{g}(t)$ positiv definit ist:

$$u^+ \hat{g} u = \sum_{m,n} c_m^* c_n u_m^+ \hat{g} u_n = \sum_m x_m |c_m|^2 \geq 0. \quad (4.41)$$

Die Bedingung (4.36) können Gorini et al. /20/ anwenden, um zu zeigen, daß die Positivität von $\{c_{rs}\}$ die vollständige Positivität der dynamischen Transformation, die durch Gl.(4.20) gegeben ist, impliziert. Denn ein Element $\hat{P} = \sum_{i,j=1}^{\Omega} \hat{P}_{ij} \otimes \hat{E}_{ij}$ von $M(\Omega) \otimes M(\Omega)$ ist genau dann eine selbstadjungierte Projektion, wenn

$$\hat{P}_{ij}^+ = \hat{P}_{ji}, \quad \sum_{l=1}^{\Omega} \hat{P}_{il} \hat{P}_{lj} = \hat{P}_{ij}, \quad (i,j = 1, \dots, \Omega), \quad (4.42)$$

gilt, und zwei Projektionen $\hat{P}, \hat{Q}$ sind genau dann orthogonal, wenn

$$\sum_{l=1}^{\Omega} \hat{P}_{il} \hat{Q}_{lj} = 0, \quad (i,j = 1, \dots, \Omega), \quad (4.43)$$

gilt.

Für zwei orthogonale, selbstadjungierte Projektionen $\hat{P}, \hat{Q}$ folgt dann aber

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \hat{P} (\hat{L} \otimes \hat{I}_{\Omega}) (\hat{Q}) \} &= \text{Sp} \{ \hat{P} \left(\sum_{i,j} \hat{L} (\hat{Q}_{ij}) \otimes \hat{E}_{ij} \right) \} \\ &= \text{Sp} \left\{ \sum_{i,j,k} \hat{P}_{ij} \hat{L} (\hat{Q}_{jk}) \otimes \hat{E}_{ik} \right\} = \sum_{i,j} \text{Sp} \{ \hat{P}_{ij} \hat{L} (\hat{Q}_{ji}) \} \\ &\stackrel{(4.20)}{=} -i \sum_{i,j} \text{Sp} (\hat{P}_{ij} [\hat{H}, \hat{Q}_{ji}]) + \sum_{r,s=1}^{\Omega^2-1} c_{rs} \sum_{i,j} [\text{Sp} (\hat{P}_{ij} \hat{F}_r \hat{Q}_{ji} \hat{F}_s^+) \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Sp} (\hat{P}_{ij} \hat{F}_s^+ \hat{F}_r \hat{Q}_{ji} + \hat{P}_{ij} \hat{Q}_{ji} \hat{F}_s^+ \hat{F}_r)] \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r,s=1}^{\Omega^2-1} c_{rs} \sum_{i,j} \operatorname{Sp} (\hat{P}_{ij} \hat{F}_r \hat{Q}_{ji} \hat{F}_s^+) \\
 & \stackrel{(4.42)}{=} \sum_{r,s=1}^{\Omega^2-1} c_{rs} \sum_{i,j,k,l} \operatorname{Sp} (\hat{P}_{ik} \hat{P}_{kj} \hat{F}_r \hat{Q}_{je} \hat{Q}_{ei} \hat{F}_s^+) \\
 & = \sum_{k,l} \sum_{r,s} c_{rs} \operatorname{Sp} \left[\left(\sum_j \hat{P}_{kj} \hat{F}_r \hat{Q}_{je} \right) \left(\sum_j \hat{P}_{kj} \hat{F}_s \hat{Q}_{je} \right)^+ \right] \geq 0.
 \end{aligned}$$

D.h. es folgt die vollständige Positivität. (SP bedeutet Spur in $M(\Omega) \otimes M(\Omega)$. Sp heißt Spur in $M(\Omega)$.)

Die Bedingung der vollständigen Positivität andererseits nutzen Gorini et al. /20/ aus, indem sie in Gl.(4.20) zu einem neuen Orthonormalsystem übergehen, so daß $\{c_{rs}\}$ diagonal wird:

$$\hat{\mathcal{L}}(\hat{f}) = -i[\hat{H}, \hat{f}] + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\Omega^2-1} d_r ([\hat{G}_r, \hat{f} \hat{G}_r^+] + [\hat{G}_r \hat{f}, \hat{G}_r^+]), \quad (4.45)$$

und die Bedingung (4.36) für $\hat{\mathcal{L}} \otimes \hat{I}_\Omega$ und die orthogonalen, selbstadjungierten Projektionen

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_{(q)} &= \sum_{i,j=1}^{\Omega} (\hat{G}_q \hat{E}_{ij} \hat{G}_q^+) \otimes \hat{E}_{ij}, \quad (q=1, \dots, \Omega^2-1), \\
 \hat{P}_{(\Omega^2)} &= \frac{1}{\Omega} \sum_{i,j=1}^{\Omega} \hat{E}_{ij} \otimes \hat{E}_{ij},
 \end{aligned} \quad (4.46)$$

die (4.42) und (4.43) genügen, anwenden.

Dies führt zu

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \Omega \operatorname{Sp} \left\{ \hat{P}_{(q)} (\hat{\mathcal{L}} \otimes \hat{I}_\Omega) \left(\hat{P}_{(\Omega^2)} \right) \right\} \\
 &\stackrel{\text{(vgl. (4.44))}}{=} \sum_{r=1}^{\Omega^2-1} d_r \sum_{i,j=1}^{\Omega} \operatorname{Sp} (\hat{G}_q \hat{E}_{ij} \hat{G}_q^+ \hat{G}_r \hat{E}_{ji} \hat{G}_r^+) \\
 &= \sum_{r=1}^{\Omega^2-1} d_r \operatorname{Sp} (\hat{G}_q^+ \hat{G}_r) \operatorname{Sp} (\hat{G}_q \hat{G}_r^+) = d_q.
 \end{aligned} \quad (4.47)$$

D.h. notwendig und hinreichend für vollständige Positivität der dynamischen Transformation ist die Positivität der Matrix $\{c_{rs}\}$, $(r,s=1,\dots,\Omega-1)$, in Gl.(4.20). Gl.(4.20) mit $\{c_{rs}\} \geq 0$ ist also die dissipative von Neumannsche Gleichung, die wir bei der Quantisierung anstreben.

§3 Ergodenbedingung und kanonische Quantisierung

Bei dissipativen Prozessen müssen wir als weitere stochastische Bedingung fordern, daß das dissipative System in tiefere Energieeigenzustände zerfällt und für $t \rightarrow \infty$ in den Grundzustand übergeht. Die Energieeigenzustände sollen dabei die relativ zur Größe der Eigenwerte geordneten Eigenzustände φ_n des Hamiltonoperators $\hat{H}$ sein. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten pro Zeiteinheit folgt aus dieser Ergodenbedingung: Die Übergangswahrscheinlichkeit T_{on} für den Übergang vom Grundzustand φ_0 in den angeregten Zustand φ_n ist null, d.h. für $\delta_{ij} = \delta_{i0} \delta_{j0}$ und $n \neq 0$ gilt

$$T_{on} = \varphi_n^+ \hat{J} \varphi_n = 0. \quad (4.48)$$

Da das dissipative System nur in tiefere Zustände zerfällt, gilt allgemeiner sogar

$$T_{mn} = 0, \quad (m < n). \quad (4.49)$$

Aus Gl.(4.20) folgt

$$T_{mn} = \sum_{r,s=1}^{\Omega-1} c_{rs} \varphi_n^+ \hat{F}_r \varphi_m \varphi_m^+ \hat{F}_s^+ \varphi_n \quad (4.50)$$

für $m \neq n$ und

$$\begin{aligned} T_{mm} &= \sum_{r,s=1}^{\Omega-1} c_{rs} (\varphi_m^+ \hat{F}_r \varphi_m \varphi_m^+ \hat{F}_s^+ \varphi_m - \varphi_m^+ \hat{F}_s^+ \hat{F}_r \varphi_m) \\ &= - \sum_{m(\neq m)} T_{mm}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

so daß (4.48) auch für $n=0$ gilt. Setzen wir in Gl.(4.20) $c_{rs} = c \int_{r1} \int_{s1}$ voraus, kommt neben dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ also nur ein Dissipationsoperator $\hat{F}$ vor, muß $\hat{F}$ folgenden Bedingungen genügen:

$$F_{nn} = 0 \quad \text{für alle } n \quad (4.52)$$

und

$$F_{nm} = 0 \quad \text{für } m < n. \quad (4.53)$$

Ob wir mit einem Dissipationsoperator $\hat{F}$ auskommen, muß sich bei der Quantisierung im Einzelfall zeigen. Daß es für Ω^{-1} Dissipationsoperatoren besonders im Grenzfall $\Omega \rightarrow \infty$ wegen der großen Zahl der Unbekannten schwer sein wird, die Quantisierung eindeutig zu machen, erscheint aber von vornherein klar. Wir beschränken uns deshalb auf ein $\hat{F}$ und prüfen im Einzelfall, ob eine Quantisierung möglich ist, und ob sie durch die Ergodenbedingung (4.52) und (4.53) eindeutig festgelegt ist. Für den gedämpften HO wird dies der Fall sein.

Als Quantisierungsvorschrift für $\Omega \rightarrow \infty$ schlagen wir nun vor, die verallgemeinerte Liouvillegleichung in solch einer Form zu schreiben, daß sie beim Übergang von Funktionen f, x_n, q_n zu Operatoren $\hat{f}, \hat{x}_n, \hat{q}_n$ und von Poissonklammern $i\{A, B\}$ zu Kommutatoren $[\hat{A}, \hat{B}]$ in die dissipative von Neumannsche Gleichung übergeht und zwar in eine, in der nur ein Dissipationsoperator $\hat{F}$ vorkommt, der die Ergodenbedingung (4.52) und (4.53) erfüllt. Im konkreten Fall werden wir den umgekehrten Weg gehen. Wir werden die dissipative von Neumannsche Gleichung (4.20) mit $c_{rs} = c \int_{r1} \int_{s1}$ ansetzen und durch Übergang von Operatoren zu Funktionen und von Kommutatoren zu Poissonklammern durch Vergleich mit der verallgemeinerten Liouvillegleichung Bestimmungsgleichungen gewinnen. Diese Bestimmungsgleichungen und die, die sich aus der Ergodenbedingung

ergeben, werden benutzt, um den Hamiltonoperator $\hat{H}$ und den Dissipationsoperator $\hat{F}$ festzulegen. Das Quantisierungsprogramm unterscheidet sich von dem der Hamiltonschen Physik also nur in der dynamischen Gleichung, von der es ausgeht, und zu der es führt.

Kap. 5 Stochastische Quantenmechanik des gedämpften harmonischen Oszillators

§1 Quantisierung des gedämpften harmonischen Oszillators

Um für den gedämpften HO die dissipative von Neumannsche Gleichung abzuleiten, gehen wir wegen der Linearität der Bewegungsgleichung von bilinearen Operatoren

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (a^2 \hat{q}^2 + 2b \hat{q} \hat{x} + c \hat{x}^2) \quad (5.1)$$

und

$$\hat{F} = f \hat{q} + g \hat{x} \quad (5.2)$$

aus.

Der unserer Quantisierungsvorschrift entsprechende Übergang von Gl.(4.20) mit $c_{rs} = \delta_{r1} \delta_{s1}$ zur klassischen Theorie liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{GHO}}(x, q, t) = & \left(b + \frac{i}{2} (gf^* - g^*f) \right) q \frac{\partial}{\partial q} \rho_{\text{GHO}} \\ & + c x \frac{\partial}{\partial q} \rho_{\text{GHO}} + \left(-b + \frac{i}{2} (gf^* - g^*f) \right) x \frac{\partial}{\partial x} \rho_{\text{GHO}} \\ & - a q \frac{\partial}{\partial x} \rho_{\text{GHO}} + i (gf^* - g^*f) \rho_{\text{GHO}}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

die mit der verallgemeinerten Liouvillegleichung (3.1) des gedämpften HO zu identifizieren ist.

Der Vergleich von (3.1) und (5.3) führt zu Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten aus $\hat{H}$ und $\hat{F}$:

$$i(gf^* - g^*f) = 2\gamma, \quad (5.4)$$

$$a = \frac{1}{m}, \quad (5.5)$$

$$b = 0, \quad (5.6)$$

$$c = m\omega^2. \quad (5.7)$$

Für $\hat{H}$ erhält man also einen Operator, der sich von dem Hamiltonoperator des HO nur durch die reduzierte Frequenz unterscheidet. Seine Eigenfunktionen sind deshalb

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{m\omega}{2}x^2}, \quad n=0,1,\dots, \quad (5.8)$$

mit

$$\hat{a}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (\hat{q} \pm i m \omega \hat{x}), \quad (5.9)$$

seine Eigenwerte

$$\omega_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (5.10)$$

Nutzt man die Ergodenbedingung (4.52)

$$\mathcal{F}_{n0} = \int dx \varphi_n^+(x) \left(\frac{1}{i} f \frac{\partial}{\partial x} + g(x) \right) \varphi_0(x) = 0 \quad (5.11)$$

aus, so ergibt sich für f und g eine weitere Bestimmungsgleichung. Da (5.11) für alle n gelten soll, folgt nämlich

$$\left(\frac{1}{i} f \frac{\partial}{\partial x} + g(x) \right) \varphi_0(x) = 0 \quad (5.12)$$

und mit (5.8)

$$\left(-\frac{m\omega}{i} f x + g(x) \right) \varphi_0(x) = 0, \quad (5.13)$$

also

$$g = -im\omega f. \quad (5.14)$$

Setzen wir (5.14) in (5.4) ein, erhalten wir

$$m\omega f f^* = \gamma. \quad (5.15)$$

Da eine Änderung der Phase von f nach Gl.(5.14) zur gleichen Phasenänderung in g und damit auch in $\hat{F}$ führt, ist die Phase ohne Einfluß auf die dissipative von Neumannsche Gleichung. Wir können o.B.d.A. also

$$f = \sqrt{\frac{\gamma}{m\omega}} \quad (5.16)$$

wählen. Dies führt zu

$$\hat{F} = \sqrt{\frac{\gamma}{m\omega}} (\hat{q} - im\omega \hat{x}) = \sqrt{2\gamma} \hat{a}^- \quad (5.17)$$

und schließlich zur dissipativen von Neumannschen Gleichung des gedämpften HO:

$$i\dot{\hat{p}}_{\text{GHO}} = \omega [\hat{a}^+ \hat{a}^-, \hat{p}_{\text{GHO}}] + i\gamma \{ [\hat{a}^-, \hat{p}_{\text{GHO}} \hat{a}^+] + [\hat{a}^- \hat{p}_{\text{GHO}}, \hat{a}^+] \}. \quad (5.18)$$

Gl.(5.17) zeigt, daß auch die Bedingung (5.53) erfüllt ist.

Gl.(5.18) ist also eindeutig bestimmt, und dies u.a. dadurch, daß wir Gl.(5.3) mit Gl.(3.1) verglichen haben. Wir haben dabei von dem Umweg über das abgeschlossene System Gebrauch gemacht, indem wir (x, q) als kanonisches Paar behandelt haben. Vergleichen wir (5.3) mit der Kontinuitätsgleichung des gedämpften HO in den Variablen x und $\dot{x}$, bleibt der Zusammenhang zwischen kanonischem und kinetischem Impuls offen, und die Quantisierung ist nicht eindeutig. Nur in diesem einen Punkt wird der Übergang zum abgeschlossenen System und damit die Beschränkung auf LS für die Theorie wesentlich.

Die eindeutig bestimmte Gleichung (5.18) wurde gemäß unserer Quantisierungsvorschrift gewonnen. Da aber nur für $\Omega < \infty$ nachgewiesen wurde, daß diese Quantisierungsvorschrift zu vernünftigen Ergebnissen führt, steht der Beweis noch aus, daß Gl.(5.18) allen physikalischen Bedingungen genügt. Dieser Beweis wurde von Kossakowski /33/ für eine Klasse von Operatoren erbracht, zu der der Liouvilleoperator $\hat{\mathcal{L}}_{\text{GHO}}$ gehört. Daß die physikalischen Bedingungen erfüllt sind, werden wir aber auch der Lösung von Gl.(5.18) und der stochastischen Gleichung ansehen.

§2 Die Lösung der dissipativen Gleichung

Die dissipative von Neumannsche Gleichung kann in der Form

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathcal{S}}_{\text{GHO}}(t) = \hat{H}_{\text{GHO}} \hat{\mathcal{S}}_{\text{GHO}} - \hat{\mathcal{S}}_{\text{GHO}} \hat{H}_{\text{GHO}}^+ + i2\gamma \hat{a}^- \hat{\mathcal{S}}_{\text{GHO}} \hat{a}^+ \quad (5.19)$$

mit

$$\hat{H}_{\text{GHO}} = \omega(\hat{a}^+ \hat{a}^- + \frac{1}{2}) - i\gamma \hat{a}^+ \hat{a}^- \quad (5.20)$$

geschrieben werden. Die Integration dieser Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{S}}_{\text{GHO}}(t) = & e^{-i \hat{H}_{\text{GHO}} t} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (1 - e^{-2\gamma t})^r \times \right. \\ & \left. \times (\hat{a}^-)^r \hat{\mathcal{S}}_{\text{GHO}}(0) (\hat{a}^+)^r \right] e^{i \hat{H}_{\text{GHO}}^+ t} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Denn für (5.21) gilt

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathcal{S}}_{\text{GHO}}(t) = & \hat{H}_{\text{GHO}} \hat{\mathcal{S}}_{\text{GHO}} - \hat{\mathcal{S}}_{\text{GHO}} \hat{H}_{\text{GHO}}^+ \\ & + i2\gamma e^{-2\gamma t} e^{-i(\omega - i\gamma) \hat{a}^+ \hat{a}^- t} \hat{a}^- \left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r-1)!} \times \right. \\ & \left. \times (1 - e^{-2\gamma t})^{r-1} (\hat{a}^-)^{r-1} \hat{\mathcal{S}}_{\text{GHO}}(0) (\hat{a}^+)^{r-1} \right] \hat{a}^+ e^{i(\omega + i\gamma) \hat{a}^+ \hat{a}^- t} \end{aligned} \quad (5.22)$$

und

$$\begin{aligned}
 e^{\lambda(\hat{a}^+\hat{a}^-+1)}(\hat{a}^-) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r(\hat{a}^+\hat{a}^-+1)^r}{r!} \hat{a}^- \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r(\hat{a}^-\hat{a}^+)^r}{r!} \hat{a}^- = \hat{a}^- e^{\lambda\hat{a}^+\hat{a}^-}.
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Gl.(5.21) zeigt, daß $\hat{g}(t)$ für hermitesches $\hat{g}(0)$ hermitesch ist. Außerdem fällt auf, daß für die dynamische Transformation (4.21)

$$g_{ij}(t) = \Lambda_{ik} g_{ke}(0) \tag{5.24}$$

der nichthermitesche Hamiltonoperator (5.20) ins Spiel kommt. Dieser Operator ist derselbe wie der von Bopp /6/ und Dekker /15/ vorgeschlagene. Wir sind allerdings nicht von (5.20) ausgegangen, um daraus die richtige Dynamik des Systems abzuleiten, sondern die dynamische Gleichung (5.18) hat umgekehrt zum Hamiltonoperator (5.20) geführt.

Der Beitrag des nichthermiteschen Hamiltonoperators (5.20) zur dynamischen Transformation (4.21) hat formale Ähnlichkeit mit dem Beitrag eines hermiteschen Hamiltonoperators zur Hamiltonschen dynamischen Transformation

$$\hat{g}(t) = e^{-i\hat{H}t} \hat{g}(0) e^{i\hat{H}t}. \tag{5.25}$$

Der erste Summand aus Gl.(5.21) ist sogar exakt von der Form (5.25). Daß im allgemeinen nicht-Hamiltonschen Fall mehr als nur der erste Summand ins Spiel kommen, wird bei der Entwicklung der dynamischen Transformation nach Eigenlösungen deutlich.

Denn aus der Hermitezität von $\hat{g}$ folgt

$$\Lambda_{ikje}(t) = \Lambda_{jeik}^*(t) \tag{5.26}$$

und damit für endlich dimensionalen Zustandsraum die

Möglichkeit, Λ_t nach Eigenvektoren $\hat{U}_r$ mit $\sum_{j,k} U_{jk}^r \hat{U}_{jk}^{*r} < \infty$ zu entwickeln:

$$\Lambda_{ikje} = \sum_r c_r u_{ik}^r \hat{u}_{je}^{*r} . \quad (5.27)$$

Die Formel (5.27) kann nicht ohne weiteres analog zur Entwicklung von $\hat{g}$ nach Eigenfunktionen (vgl. von Neumann /52/ S.249f) für Systeme mit unendlich vielen Zuständen verallgemeinert werden, wie dies Bausch /2/ tut, da die Bedingung $\sum_{(nn)} \Lambda_{(nn)}(nn) < \infty$ an die Spur nicht erfüllt ist, und damit die Hilbertraum-Theorie nicht Gl.(5.27) impliziert. Da im allgemeinen auch im nichtdissipativen Fall $\sum_{j,k} U_{jk}^0 \hat{U}_{jk}^{*0} < \infty$ nicht erfüllt ist, ist die Theorie des Hilbertraums für die Darstellung (5.27) auch gar nicht zuständig, und wir übertragen deshalb mit unserer Argumentation aus der Ableitung der dissipativen von Neumannschen Gleichung Gl.(5.27) auf den Fall eines unendlich dimensionalen Zustandsraums.

In der Hamiltonschen Physik gilt $c_r(t) = \delta_{r0}$ und $\hat{U}_0 = e^{-i\hat{H}t}$. Die Theorie des gedämpften HO kann mit (5.20) dazu nicht vollkommen analog sein, da

$$\hat{U}_0(t) = e^{-i[\omega(\hat{a}^+\hat{a}^- + \frac{1}{2}) - i\gamma\hat{a}^+\hat{a}^-]t} \quad (5.28)$$

nicht zu einem normierbaren $\hat{g}(t)$ führt und wegen des Auftretens der Kombination $\hat{a}^+\hat{a}^-$ auch keine Zerfälle beschreiben kann. Deshalb kommen in Gl.(5.21) weitere Summanden mit

$$\hat{U}_r(t) = e^{-i[\omega(\hat{a}^+\hat{a}^- + \frac{1}{2}) - i\gamma\hat{a}^+\hat{a}^-]t} (\hat{a}^-)^r \quad (5.29)$$

vor, in denen $\hat{U}_r(t)$ Zerfälle in den um die Energie $r\omega$ tieferen Zustand beschreibt.

Die Bedingung $\text{Sp} \hat{g} = 1$ legt nun die $c_r(t)$ fest. Denn aus $\text{Sp} \hat{g} = 1$ folgt $\Lambda_{ikil} = \delta_{kl}$ und damit

$$\begin{aligned}
 \frac{(\hat{a}^+)^m}{m!} \psi_0 &= \sum_r c_r u_r^+ u_r \frac{(\hat{a}^+)^m}{m!} \psi_0 \\
 &= \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} r! c_r e^{-2\gamma(m-r)t} \frac{(\hat{a}^+)^m}{m!} \psi_0.
 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Gl.(5.30) gilt genau dann, wenn

$$\sum_{r=0}^m \binom{m}{r} r! c_r e^{-2\gamma(m-r)t} = 1 \quad (5.31)$$

für alle n gilt, was wiederum mit

$$c_r(t) = \frac{1}{r!} (1 - e^{-2\gamma t})^r \quad (5.32)$$

äquivalent ist. Gl.(5.21) ist also nichts anderes als die allgemeine dynamische Transformation (5.27) mit dem Hamiltonoperator (5.20) und dem Orthogonalsystem (5.29).

Der Lösung (5.21) der dissipativen von Neumannschen Gleichung (5.18) ähnlich ist natürlich die Lösung der entsprechenden Zeitgleichung im Heisenbergbild. Zu (5.18) gehört nach (4.26) als Gleichung im Heisenbergbild

$$i \dot{\hat{A}}(t) = \hat{A} \hat{H} - \hat{H} \hat{A} + i 2\gamma \hat{a}^+ \hat{A} \hat{a}^- \quad (5.33)$$

mit der Lösung

$$\hat{A}(t) = e^{i \hat{H}^+ t} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (e^{2\gamma t} - 1)^r (\hat{a}^+)^r \hat{A}(0) (\hat{a}^-)^r \right] e^{-i \hat{H}^- t} \quad (5.34)$$

(5.34) ist Lösung von (5.33), da

$$\begin{aligned}
 i \dot{\hat{A}}(t) &= \hat{A} \hat{H} - \hat{H} \hat{A} + i 2\gamma e^{2\gamma t} \cdot \\
 &\times e^{i \hat{H}^+ t} \hat{a}^+ \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (e^{2\gamma t} - 1)^r (\hat{a}^+)^r \right. \\
 &\times \hat{A}(0) (\hat{a}^-)^r \left. \right] \hat{a}^- e^{-i \hat{H}^- t}
 \end{aligned} \quad (5.35)$$

und

$$\begin{aligned}
 e^{\gamma t} e^{i\hat{H}^+ t} \hat{a}^+ &= e^{\gamma t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (i\omega - \gamma)^T t^r \hat{a}^+ (\hat{a}^- \hat{a}^+)^r \\
 &= \hat{a}^+ e^{\gamma t} e^{(i\omega - \gamma)(\hat{a}^+ \hat{a}^- + 1)t} = \hat{a}^+ e^{i\omega t} e^{i\hat{H}^+ t}, \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

also auch

$$\hat{a}^- e^{-i\hat{H}^- t} e^{\gamma t} = e^{-i\omega t} e^{-i\hat{H}^- t} \hat{a}^- \quad (5.37)$$

gilt.

Speziell für $\hat{A}(t) = \hat{a}^-(t)$ folgt aus (5.34)

$$\begin{aligned}
 \hat{a}^-(t) &= e^{i(\omega + i\gamma)\hat{a}^+ \hat{a}^- t} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (e^{2\gamma t} - 1)^r \right. \\
 &\quad \left. \times (\hat{a}^+)^r \hat{a}^- (\hat{a}^-)^r \right] e^{-i(\omega - i\gamma)\hat{a}^+ \hat{a}^- t}. \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

Für den Absteigeoperator gilt also

$$\begin{aligned}
 \hat{a}^-(t) \varphi_n &= e^{i(\omega + i\gamma)\hat{a}^+ \hat{a}^- t} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (e^{2\gamma t} - 1)^r \right. \\
 &\quad \left. \times (\hat{a}^+)^r (\hat{a}^-)^{r+1} \varphi_n \right] e^{-i(\omega - i\gamma)\hat{a}^+ \hat{a}^- t} \\
 &= \sqrt{n} \varphi_{n-1} e^{-i\omega t} e^{-\gamma(2n-1)t} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} (e^{2\gamma t} - 1)^r \quad (5.39) \\
 &= \sqrt{n} \varphi_{n-1} e^{-i(\omega - i\gamma)t},
 \end{aligned}$$

d.h.

$$\hat{a}^-(t) = \hat{a}^- e^{-i(\omega - i\gamma)t}. \quad (5.40)$$

(5.40) ist eine Lösung der Gl.(5.33), die auch schon

Ingarden und Kossakowski /25/ gefunden haben.

Entwickeln wir $\hat{g}_{\text{GHO}}$ nach dem vollständigen Orthonormalsystem der Eigenlösungen φ_n (5.8):

$$\hat{g}_{\text{GHO}}(t) = \sum_{m,m'} (\varphi_m^\dagger \hat{g}_{\text{GHO}}(t) \varphi_{m'}) \frac{(\hat{a}^\dagger)^m}{m!} \varphi_0^\dagger \varphi_0 \frac{(\hat{a})^{m'}}{m'!}, \quad (5.41)$$

so folgt aus Gl.(5.18) für die Matrixelemente die Differentialgleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} g_{nm}(t) = (\omega - i\gamma) n g_{nm} - (\omega + i\gamma) m g_{nm} \\ + i 2\gamma \sqrt{(n+1)(m+1)} g_{n+1, m+1}. \quad (5.42)$$

Für die Diagonalelemente $g_{nn}(t) =: w_n(t)$, d.h. für die Wahrscheinlichkeiten, das System im Zustand φ_n zu finden, gilt dann die stochastische Gleichung

$$\dot{w}_n(t) = -2\gamma n w_n(t) + 2\gamma (n+1) w_{n+1}(t). \quad (5.43)$$

Die stochastische Gleichung zeigt, daß $\hat{g}(t)$ zeitunabhängig auf 1 normierbar ist. Denn aus Gl.(5.43) folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dot{w}_n(t) = -2\gamma \sum_{n=1}^{\infty} n w_n(t) \\ + 2\gamma \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) w_{n+1}(t) = 0. \quad (5.44)$$

Die Gl.(5.43) impliziert auch für positive $w_n(0)$ die Positivität von $w_n(t)$. Nehmen wir nämlich an, daß ein $w_n(t) < 0$ sein sollte, so muß ein t_0 mit $w_m(t_0) = 0$, $\dot{w}_m(t_0) < 0$ und $w_n(t_0) \geq 0$ für alle n ungleich m existieren. Mit Hilfe der stochastischen Gleichung folgt aber im Widerspruch dazu

$$\dot{w}_m(t_0) = 2\gamma (m+1) w_{m+1}(t_0) \geq 0. \quad (5.45)$$

D.h. unsere Annahme der Existenz negativer $w_n(t)$ ist falsch.

Die Lösung der Gl.(5.42) findet man, indem man die entsprechenden Matrixelemente von (5.21) ausrechnet. Die Rechnung liefert

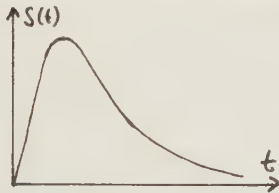
$$\begin{aligned} f_{nm}(t) = & e^{-i(\omega - i\gamma)nt} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \sqrt{\binom{n+r}{n} \binom{n+r}{m}} \cdot \right. \\ & \left. \cdot (1 - e^{-2\gamma t})^r f_{n+r, m+r}(0) \right] e^{i(\omega + i\gamma)nt} \end{aligned} \quad (5.46)$$

und speziell

$$f_{nn}(t) = e^{-2\gamma nt} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r}{n} (1 - e^{-2\gamma t})^r f_{n+r, n+r}(0). \quad (5.47)$$

Die Lösung (5.47) zeigt, daß für $f_{nm}(0) = \delta_{nm} f_{nn}(0)$ nur Diagonalelemente eine Rolle spielen. Für die Entropie $S(t) = -\text{Sp}(\hat{f} \ln \hat{f})$ gilt in diesem Fall

$$S(t) = - \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \ln w_n(t). \quad (5.48)$$



Mit dem Anfangswert $f_{nm}(0) = \delta_{n1} \delta_{m1}$ und der Lösung $w_1(t) = e^{-2\gamma t}$, $w_0(t) = 1 - e^{-2\gamma t}$ ändert sich die Entropie qualitativ der nebenstehenden Abbildung entsprechend.

Die Dissipation zerstört zu Beginn des Prozesses also die Ordnung, indem sie dafür sorgt, daß das System den angeregten Zustand verläßt, "ordnet" das System für $t \rightarrow \infty$ aber wieder. Dies steht weder im Widerspruch zum II. Hauptsatz der Thermodynamik, der nur für die innere Entropie eine Zunahme fordert, noch zum H-Theorem, das allgemein aus stochastischen Gleichungen abgeleitet werden kann (vgl. Bopp /5/ S.51ff). Denn Voraussetzung für die Herleitung des H-Theorems aus stochastischen

Gleichungen ist die Existenz einer stationären Verteilung w_n^0 mit $w_n^0 \neq 0$ für alle n .

§3 Der strahlungsgedämpfte harmonische Oszillator

Mit Hilfe der StD des gedämpften HO können auch Aussagen über die Physik des strahlungsgedämpften HO, die von der Bewegungsgleichung (2.6) ausgeht, gemacht werden. Denn für fast periodische Bewegungen ist die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{x} + 2m\tau\omega_0^2 \dot{x} + m\omega_0^2 x = 0, \quad (5.49)$$

d.h. die Bewegungsgleichung des gedämpften HO mit der Dämpfungskonstante $\gamma = \tau\omega_0^2$, eine gute Näherung für (2.6). Die Bedingung für eine fast periodische Bewegung ist explizit $\tau\omega_0^2 \ll \omega_0$, was für die elektromagnetische Strahlungskraft mit

$$\tau = \frac{e^2}{12\pi m} = 0.3 \cdot 10^{-23} \text{ sec} \quad (5.50)$$

(vgl. Anhang) quantitativ zu $\omega_0 \ll 10^{23} \text{ sec}^{-1}$ führt.

Ohne Näherung führt die Bewegungsgleichung (2.6) zur verallgemeinerten Liouvillegleichung (3.35), die, wie wir gesehen haben, keine Dämpfung sondern Anfachung beschreibt, also der "run-away"-Lösung der Bewegungsgleichung entspricht. Dies wird sich wohl auf die Bedingung der Positivität an die dissipative von Neumannsche Gleichung auswirken, was aber, da die Quantisierung bisher aussteht, noch geprüft werden muß. Einfacher als die Quantisierung der verallgemeinerten Liouvillegleichung (3.35) selbst ist die der Gl.(3.22), die sich von (3.35) durch $a_4 \neq 0$ unterscheidet. Aus diesem Grund, und da für sehr kleine a_4 auch aus dieser Gleichung Aussagen über den strahlungsgedämpften HO gewonnen werden können, werden wir die Bewegungsgleichung vierter Ordnung im folgenden diskutieren.

Wie bei allen Gleichungen gerader Ordnung mit $a_{2n-1}=0$, ($n=1, \dots, k-1$), kann wegen der Ähnlichkeit zum gedämpften HO die dissipative von Neumannsche Gleichung sofort angegeben werden, wenn man an die Koeffizienten a_n Bedingungen stellt, die der Bedingung reeller reduzierter Frequenz ω für den gedämpften HO entsprechen. Setzen wir $a_4 > 0$ und

$$\omega_1^2 = \frac{m}{a_4} - \frac{m^2 \tau^2}{a_4} > 0 \quad (5.51)$$

voraus, so lautet die dissipative von Neumannsche Gleichung

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \hat{S} = & [-\omega_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1^- + \hat{q}_0 \hat{x}_1 + \frac{m\omega_0^2 \hat{x}_0^2}{2}, \hat{S}] \\ & - i \frac{m\tau}{a_4} \{ [\hat{a}_1^-, \hat{S} \hat{a}_1^+] + [\hat{a}_1^-, \hat{S}, \hat{a}_1^+] \} \end{aligned} \quad (5.52)$$

mit

$$\hat{a}_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2a_4\omega_1}} (\hat{q}_1 \pm i a_4 \omega_1 \hat{x}_1). \quad (5.53)$$

Gl.(5.52) enthält einen Beitrag negativer Energie und zwar $-\omega_1 a_1^+ a_1^-$. Mit der Definition (3.23) der klassischen Auf- und Absteigefunktionen war dies nicht der Fall. Die Definition (3.23) ist aber nur dann analog zu der entsprechenden des gedämpften HO, wenn $a_4 < 0$ ist. $a_4 < 0$ können wir wegen der Bedingung (5.51) aber nicht wählen. Wir können höchstens die Vorzeichen aller Koeffizienten a_n in der Bewegungsgleichung ändern. Dann wird der negative Energiebeitrag $-\omega_1 a_1^+ a_1^-$ positiv, $m\omega_0^2 x_0^2/2$ aber negativ, was nicht weniger problematisch ist. In beiden Fällen ist $a_3/a_4 < 0$, und Gl.(5.52) führt nicht zu positiv definitem $\hat{S}(t)$, so wie die entsprechende verallgemeinerte Liouvillegleichung keine Dämpfung beschreibt.

Für ein vollständiges Orthonormalsystem

$$\phi_{nm}(x_0, x_1) = \frac{1}{\sqrt{m!}} (\hat{a}_1^+)^m \varphi_0(x_1) \psi_m(x_0) \quad (5.54)$$

kommen nach Gl.(5.52) nur Übergänge von den Zuständen ϕ_{nm} in $\phi_{n-1,m}$ vor. Die ϕ_{nm} sind aber keine Energieeigenzustände, da diese nach Definition Eigenlösungen von

$$\hat{H} = -\omega_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1^- + \hat{q}_0 x_1 + \frac{m\omega_0^2 \hat{x}_0^2}{2} \quad (5.55)$$

sein sollen. Um die Physik des strahlungsgedämpften HO genauer diskutieren zu können, müßten die Energieeigenzustände und die zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet werden.

Damit wären allerdings noch keine für die Theorie eines Elektrons im eigenen retardierten Feld relevanten Ergebnisse gewonnen. Denn die Ungleichung (5.51) führt zu einem Regularisierungsparameter $\ell > 10^{-12}$ cm (vgl. Anhang), der sicher viel zu groß ist. Kleinere Regularisierungsparameter können erst diskutiert werden, wenn z.B. der überkritisch gedämpfte HO behandelt werden kann. Wie dies zu geschehen hat, ist wenigstens im Prinzip vorgezeichnet, genauso wie die Behandlung beliebiger LS.

Anhang

Die Bewegungsgleichung eines Elektrons im eigenen elektromagnetischen Feld lautet

$$\frac{d}{d\tau} \frac{m \dot{x}^\mu(\tau)}{\sqrt{-\dot{x}^2(\tau)}} = e B^{\mu\nu}(x(\tau)) \dot{x}_\nu(\tau) \quad (A.1)$$

($\mu, \nu=0, 1, 2, 3$; $x=(x_0, \underline{x})$; $\dot{x}^2 = -\dot{x}_0^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2$),
wobei der Feldtensor $B^{\mu\nu}$ mit dem Viererpotential A^μ gemäß

$$B^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x), \quad (A.2)$$

und A^μ über die Greenfunktion $G(x)$ mit der Viererstromdichte J^μ gemäß

$$A^\mu(z) = \frac{1}{4\pi} \int d^4 z' G(z-z') J^\mu(z') \quad (A.3)$$

verknüpft sind. Die Viererstromdichte J^μ wiederum erhält man aus der Raum-Zeit-Bahn $x(\tau)$ des Elektrons über

$$J^\mu(z) = e \int \delta(z-x(\tau)) \dot{x}^\mu(\tau) d\tau. \quad (A.4)$$

Wählen wir die Landésche Greenfunktion

$$G(x) = 2 \theta(x) \delta(x^2 + \ell^2), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & (x^2 < 0, x_0 > 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (A.5)$$

so folgt aus (A.3)

$$A^\mu(t, \underline{z}) = \frac{1}{4\pi} \int dt' d^3 \underline{z}' \frac{J^\mu(t', \underline{z}')}{\sqrt{R^2 + \ell^2}} \delta(t' - t + \sqrt{R^2 + \ell^2}) \quad (A.6)$$

mit $R = \underline{z} - \underline{z}'$. Führen wir die t' -Integration aus und entwickeln die Viererstromdichte

$$J^\mu(t - \sqrt{R^2 + \ell^2}, \underline{z}') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (R^2 + \ell^2)^{n/2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} J^\mu(t, \underline{z}'), \quad (A.7)$$

erhalten wir

$$A^{\mu}(t, \underline{z}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^3 \underline{z}' \frac{\partial^n}{\partial t^n} \sqrt{R^2 + \ell^2}^{n-1} y^{\mu}(t, \underline{z}') \quad (\text{A.8})$$

und

$$B^{\alpha 0}(t, \underline{z}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^3 \underline{z}' \frac{\partial^n}{\partial t^n} x \quad (\text{A.9})$$

$$\times \left[y^0(t, \underline{z}') \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \sqrt{R^2 + \ell^2}^{n-1} + \sqrt{R^2 + \ell^2}^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} y^{\alpha}(t, \underline{z}') \right].$$

$$(\alpha = 1, 2, 3).$$

Werden die Differentiationen nach z^{α} in (A.9) ausgeführt, folgt

$$\begin{aligned} B^{\alpha 0}(t, \underline{z}) = & -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \underline{z}' y^0(t, \underline{z}') \frac{z^{\alpha} - z'^{\alpha}}{(\ell^2 - \underline{z}^2 + \underline{z}'^2 + \ell^2)^{3/2}} \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^3 \underline{z}' \sqrt{R^2 + \ell^2}^{n-1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} x \\ & \left[y^{\alpha}(t, \underline{z}') + \frac{z^{\alpha} - z'^{\alpha}}{n+2} \frac{\partial}{\partial t} y^0(t, \underline{z}') \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Diese Formel kann unter Berücksichtigung von (A.4) weiter ausgewertet werden. Aus (A.4) folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} y^{\mu}(z) &= e \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \delta(z-x)}{\partial z^{\mu}} dx^{\mu} = -e \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \delta(z-x)}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \\ &= -e \int_{\mathcal{C}} d\delta(z-x) = -e (\delta(z-\tilde{x}_2) - \delta(z-\tilde{x}_1)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

für alle endlichen z , da $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ die unendlichen Enden der Raum-Zeit-Bahn $\mathcal{C}$ sind. Mit (A.11) kann im letzten Term von (A.10) $\partial J^0 / \partial t$ in $\partial J^{\beta} / \partial z^{\beta}$ umgeformt werden.

Die Auswertung des ersten Integrals mit (A.4) und partielle Integration des letzten führt dann auf

$$\begin{aligned}
 B^{\alpha 0}(t, \underline{z}) &= -\frac{e}{4\pi} \frac{(z^\alpha - x^\alpha(t))}{(\underline{z} - \underline{x}(t))^2 + \ell^2}^{3/2} \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^3 \underline{z}' \sqrt{R^2 + \ell^2}^{n-1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} x \\
 &\times \left[\frac{n+1}{n+2} y^\alpha(t, \underline{z}') - \frac{n-1}{n+2} \frac{y^\beta(t, \underline{z}') \cdot R_\beta}{R^2 + \ell^2} R^\alpha \right].
 \end{aligned} \quad (A.12)$$

Die Auswertung der restlichen Integrale mit (A.4) liefert

$$\begin{aligned}
 B^{\alpha 0}(t, \underline{z}) &= -\frac{e}{4\pi} \frac{(z^\alpha - x^\alpha(t))}{(\underline{z} - \underline{x}(t))^2 + \ell^2}^{3/2} \\
 &+ \frac{e}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{n+1}{n+2} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \dot{x}^\alpha(t) \sqrt{(\underline{z} - \underline{x}(t))^2 + \ell^2}^{n-1} \\
 &- \frac{e}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{n-1}{n+2} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \sqrt{(\underline{z} - \underline{x})^2 + \ell^2}^{n-3} [\dot{\underline{x}} \cdot (\underline{z} - \underline{x})] (z^\alpha - x^\alpha).
 \end{aligned} \quad (A.13)$$

Für $\underline{z} = \underline{x}(t)$ bleiben in (A.13) nur die Terme der ersten Summe übrig, bei denen $\dot{x}^\alpha(t)$ aber nicht $[(\underline{z} - \underline{x}(t))^2 + \ell^2]^{(n-1)/2}$ differenziert wird. Für das Feld, das durch die Raum-Zeit-Bahn $(t, \underline{x}(t))$ an der Stelle $(t, \underline{x}(t))$ erzeugt wird, gilt also

$$\begin{aligned}
 B_\alpha^0(t, \underline{x}(t)) &= \frac{e}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{n+1}{n+2} \ell^{n-1} x_\alpha^{(n+2)}(t) \\
 &= \frac{e}{8\pi} \ell^{-1} \ddot{x}_\alpha(t) - \frac{e}{6\pi} \ddot{\ddot{x}}_\alpha(t) + \dots
 \end{aligned} \quad (A.14)$$

Aus (A.4) erhalten wir dann in nichtrelativistischer Näherung für ein Elektron, das momentan in Ruhe ist,

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2}{dt^2} x_\alpha(t) &= e B_\alpha^0 \\
 &= \frac{e^2}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{n+1}{n+2} \ell^{n-1} x_\alpha^{(n+2)}(t),
 \end{aligned} \quad (A.15)$$

d.h. als Entwicklung nach dem Regularisierungsparameter ℓ
eine lineare Differentialgleichung unendlicher Ordnung.
(Vgl. z.B. Jackson /26/ S.584ff bzgl. des Abraham-
Lorentz-Modells!)

Literaturverzeichnis

- /1/ Albrecht, K.: Phys. Lett. 56 B, 127 (1975)
- /2/ Bausch, R.: Z. Phys. 193, 246 (1966)
- /3/ Blatt, J.M.: Prog. Theor. Phys. 22, 745 (1959)
- /4/ Bopp, F.: Z. angew. Phys. 14, 699 (1962)
- /5/ Bopp, F.: "Thermodynamik auf statistischer Grundlage", Vorlesungsskriptum, München (1965)
- /6/ Bopp, F.: Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturw. Kl., 67 (1973)
- /7/ Bopp, F., Lutzenberger, W.: Acta Nova Leopoldina, Vortrag beim Wartburgsymposium (1972)
- /8/ Bopp, F., Lutzenberger, W.: Z. Naturf. 28a, 408 (1973)
- /9/ Braun, E., Mazur, P.: Physica 30, 1973 (1964)
- /10/ Brittin, W.E.: Phys. Rev. 77, 396 (1950)
- /11/ Buch, L.H., Denman, H.H.: Am. J. Phys. 42, 304 (1974)
- /12/ Choi, M.D.: Can. J. Math. 24, 520 (1972)
- /13/ Davies, E.B.: Commun. Math. Phys. 33, 171 (1973)
- /14/ Davies, E.B.: Commun. Math. Phys. 39, 81 (1974)
- /15/ Dekker, H.: Z. Phys. B 21, 295 (1975)
- /16/ Dekker, H.: Z. Phys. B 24, 211 (1976)
- /17/ Denman, H.H.: Am. J. Phys. 34, 1147 (1966)
- /18/ Ford, G.W., Kac, M., Mazur, P.: J. Math. Phys. 6, 504 (1965)
- /19/ Goldstein, H.: "Klassische Mechanik", Akad. Verlagsges., Frankfurt (1963)
- /20/ Gorini, V., Kossakowski, A., Sudarshan, E.C.G.: J. Math. Phys. 17, 821 (1976)
- /21/ Hasse, R.W.: J. Math. Phys. 16, 2005 (1975)

- /22/ Havas, P.: Bull. Am. Phys. Soc. 1, 337 (1956)
- /23/ Havas, P.: Nuovo Cim. Suppl. 5, 363 (1957)
- /24/ Hirsch, A.: Math. Ann. 49, 49 (1897)
- /25/ Ingarden, R.S., Kossakowski, A.: Ann. Phys. 89, 451 (1975)
- /26/ Jackson, J.B.: "Classical Elektrodynamics", Wiley, New York u.a. (1962)
- /27/ Jordan, T.F., Pinsky, M.A., Sudarshan, E.C.G.: J. Math. Phys. 3, 848 (1962)
- /28/ Jordan, T.F., Sudarshan, E.C.G.: J. Math. Phys. 2, 772 (1961)
- /29/ Kan, K.K., Griffin, J.J.: Phys. Lett. 50 B, 241 (1974)
- /30/ Kanai, E.: Prog. Theor. Phys. 3, 440 (1948)
- /31/ Kerner, E.H.: Can. J. Phys. 36, 371 (1958)
- /32/ Kossakowski, A.: Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. Astr. Phys. 20, 1021 (1972)
- /33/ Kossakowski, A.: Rep. Math. Phys. 3, 247 (1972)
- /34/ Kostin, M.D.: J. Chem. Phys. 57, 3589 (1972)
- /35/ Kostin, M.D.: J. Stat. Phys. 12, 145 (1975)
- /36/ Lindblad, G.: Commun. Math. Phys. 48, 119 (1976)
- /37/ Ludwig, G.: "Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik", Bd. 2, Bertelsmannverlag, Düsseldorf (1974)
- /38/ Lutzenberger, W.: Dissertation, München (1973)
- /39/ Mazur, P.: "On a statistical mechanical theory of Brownian motion", in "Statistical mechanics of equilibrium and non-equilibrium" (ed. J. Meixner), North-Holland-Publ. Comp., Amsterdam (1965)

- /40/ Mehra, J., Sudarshan, E.C.G.: Nuovo Cim. B 11,
215 (1972)
- /41/ Messer, J.: Diplomarbeit, Darmstadt (1974)
- /42/ Morse, Ph.M., Feshbach, H.: "Methods of Theoretical
Physics", part I, McGraw-Hill, New York u.a. (1953)
- /43/ Myers, V.W.: Am. J. Phys. 27, 507 (1959)
- /44/ Ostrogradsky: Mém. de l'acad. de St. Pétersbourg,
sc. math. et phys., tome IV (1850)
- /45/ Pulè, J.V.: Commun. Math. Phys. 38, 241 (1974)
- /46/ Roth, G.: Diplomarbeit, Frankfurt (1964)
- /47/ Stephens, W.K.H.: Proc. Phys. Soc. London 72, 1027
(1958)
- /48/ Sudarshan, E.C.G., Mathews, P.M., Rau, J.: Phys.
Rev. 121, 920 (1961)
- /49/ Süßmann, G.: Vortrag, Los Alamos (1973)
- /50/ Tolman, R.C.: "The Principles of Statistical
Mechanics", Oxford University Press, London (1938)
- /51/ Trübenbacher, E.: Diplomarbeit, München (1958)
- /52/ von Neumann, J.: "Mathematische Grundlagen der
Quantenmechanik", Springer Verlag, Berlin (1968)
- /53/ Weidlich, W.: "Thermodynamik und statistische
Mechanik", Akad. Verlagsges., Wiesbaden (1976)
- /54/ Whittaker, E.T.: "Analytische Dynamik der Punkte
und starren Körper", Springer Verlag, Berlin (1924)

Herrn Prof. F. Bopp möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und seine Unterstützung der Ausführung, insbesondere für seinen Beitrag zum tieferen Verständnis der grundlegenden physikalischen Prinzipien, danken. Wertvolle Hinweise erhielt ich von meinen Kollegen Dr. K. Albrecht, Dr. W. Ochs, Dr. M. Schaaf und Dr. H. Spohn. Für die Gewährung eines Stipendiums nach dem GFG während der Anfertigung eines Teils dieser Arbeit schulde ich der Universität München, für die Möglichkeit, während der Anfertigung des anderen Teils an seinem Lehrstuhl die Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten zu verwalten, schulde ich Herrn Prof. F. Bopp Dank.

Lebenslauf

Am 18. Dezember 1948 wurde ich in Großenhain in Sachsen als Sohn des Arbeiters Richard Burzlaff und seiner Ehefrau Gertrud geb. Schmidt geboren. Meine Schulausbildung schloß ich 1967 in Neuß mit dem Abitur ab und begann im selben Jahr das Studium der Physik an der Universität Köln. Nach der Diplom-Vorprüfung wechselte ich 1970 an die Universität München. Dort begann ich 1971 mit meiner Diplomarbeit auf dem Gebiet der theoretischen Kernphysik am Lehrstuhl Prof. Süßmann und schloß 1972 mein Studium mit der Diplom-Hauptprüfung ab. Seit 1973 arbeitete ich an meiner Dissertation am Lehrstuhl Prof. Bopp, wo ich seit 1975 die Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten verwalte.



